点到直线的距离公式的十三种证明方法

湖北省鄂州市沼山中学 436061 余树林 袁新宝

点到直线距离公式是一个很重要的公式, 然而很多老师和学生更多的只是重视它的应用, 而对于公式本身的证明却未引起足够的重视, 尽管教材中提示大家“请研究一下如何用其他方法推导点到直线的距离公式”, 但依然不能引起广大师生的足够重视, 笔者以为: 对于一个公式的推导比运用这个公式来解决一些问题对我们的思维来讲更具有价值. 下面笔者从不同角度来思考点到直线的距离问题, 得到多种用高中数学知识推导点到直线的距离公式的方法, 供各位同仁参考.

已知点 $P(x_0, y_0)$, 直线 l: $Ax + By + C = 0$(A、B 均不为 0), 求点 P 到直线 l 的距离. (因为特殊直线很容易求距离, 这里只讨论一般直线)

1 用定义法推导点到直线的距离公式

如图 1, 点 P 到直线 l 的距离是点 P 到直线 l 的垂线段的长, 过点 P 做直线 l 的垂线为 l', 垂足为 Q, 由 $l \perp l'$ 可知 l' 的斜率为 $\frac{B}{A}$.

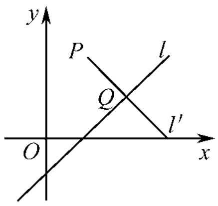

图 1

所以 l' 的方程: $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$ 与 l 联立方程组.

解得交点

$$Q\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

$$|PQ|^2 = \left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right)^2$$

$$= \left(\frac{-A^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-B^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)^2$$

$$= \frac{A^2(Ax_0 + By_0 + C)^2 + B^2(Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$= \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

所以 $|PQ| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

2 用设而不求法推导点到直线的距离公式

如图 2, 过已知点 $P(x_0, y_0)$ 作已知直线 l: $Ax + By + C = 0$ 的垂线, 设垂足为 $Q(x, y)$, 则

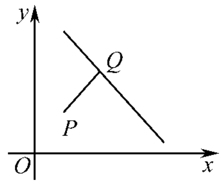

图 2

$$\begin{cases} \frac{y - y_0}{x - x_0}\left(-\frac{A}{B}\right) = -1 \\ Ax - By + C = 0 \end{cases}$$, 化简

得 $$\begin{cases} A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C) \end{cases}$$

把上面两式相加得: $(A^2 + B^2)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = (Ax_0 + By_0 + C)^2$,

所以 $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

3 用目标函数法推导点到直线的距离公式

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 l: $Ax + By + C = 0$ 上任意一点的距离的最小值就是点 P 到直线 l 的距离. 在 l 上取任意点 $M(x, y)$, 由两点的距离公式有 $|PM|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. 为了利用条件 $Ax + By + C = 0$, 将上式变形一下, 配凑系数处理得:

$$(A^2 + B^2)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = A^2(x - x_0)^2 + B^2(y - y_0)^2 + A^2(y - y_0)^2 + B^2(x - x_0)^2$$

$$= [A(x - x_0) + B(y - y_0)]^2 + [A(y - y_0) - B(x_0 - x_0)]^2$$

$$\geqslant [A(x - x_0) + B(y - y_0)]^2 = (Ax_0 + By_0 + C)^2$$

所以 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \geqslant \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

当且仅当 $A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0$ 时取等号.

所以最小值就是 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

4 用柯西不等式(课本习题结论)推导点到直线距

离公式

旧教材(人教版,代数下册·必修)第15页习题十五第6题结论“求证:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$,当且仅当$ad=bc$,即$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$时等号成立.”实为柯西不等式的最简形式,用它可以非常方便地推出点到直线的距离公式.

设$M(x,y)$为直线l:$Ax+By+C=0$上任意一点,任意点$P(x_0,y_0)$到直线l的距离为d,则:$|PM|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,所以$|PM|^2=\frac{(Ax-Ax_0)^2}{A^2}+\frac{(By-By_0)^2}{B^2}$

$$\Rightarrow(A^2+B^2)|PM|^2=(A^2+B^2)\left[\frac{(Ax-Ax_0)^2}{A^2}+\frac{(By-By_0)^2}{B^2}\right]$$

$$\geqslant(Ax-Ax_0+By-By_0)^2=(-Ax_0-By_0-C)^2$$

所以$d=|PM|_{\min}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,当且仅当$\frac{A}{x-x_0}=\frac{B}{y-y_0}$时等号成立.

5 用解直角三角形法推导点到直线距离公式

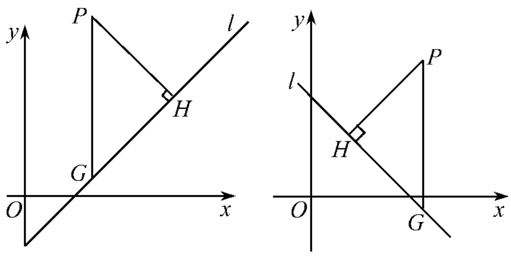

图 3

如图3,设直线l的倾斜角为α,过点P作y轴的平行线交l于$G(x_1,y_1)$,显然$x_1=x_0$,所以$y_1=-\frac{Ax_0+C}{B}$.

所以$|PG|=|y_0+\frac{Ax_0+C}{B}|=|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}|$.

易得$\angle GPH=\alpha$或$\angle GPH=180^\circ-\alpha$,在两种情况下都有$\tan^2\angle GPH=\tan^2\alpha=\frac{A^2}{B^2}$,所以$\cos\angle GPH=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

所以$d=|PH|=|PG||\cos\angle GPH|=|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}|\cdot\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

6 用三角形面积公式推导点到直线距离公式

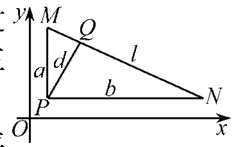

图 4

两点间距离公式的推导过程中,使用降维思想构造直角三角形,受此启示,当$A\cdot B\neq0$时,如图4,过点$P(x_0,y_0)$分别作平行于x轴,y轴的两条直线,分别交直线$Ax+By+C=0$于点$M(-\frac{By_0+C}{A},y_0)$、$N(x_0,-\frac{Ax_0+C}{B})$,则$|MP|=|x_0+\frac{By_0+C}{A}|$,$|NP|=|y_0+\frac{Ax_0+C}{B}|$.因为$MP\perp NP$,所以$Rt\triangle MPN$中,由直角三角形的面积公式得:$\frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|NP|=\frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot d$,所以$d=|PQ|=\frac{|PM||PN|}{\sqrt{|PM|^2+|PN|^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

7 用向量法推导点到直线的距离公式

由直线l的方程$Ax+By+C=0$(A,B不能同时为0),可得直线l的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B)$,过点$P(x_0,y_0)$作直线l的垂线,垂足为$H(x',y')$,则向量$\overrightarrow{PH}=\lambda\boldsymbol{n}$,即$(x'-x_0,y'-y_0)=\lambda(A,B)$,所以$x'=x_0+\lambda A$,$y'-y_0=\lambda B$,且$|\overrightarrow{PH}|=\sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2}=|\lambda|\sqrt{A^2+B^2}$,又因为点$H(x',y')$在直线$l$上,所以就有:$Ax'+By'+C=0$,即$A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C=0$,

所以$\lambda(A^2+B^2)=-(Ax_0+By_0+C)$,又因为$A$,$B$不同时为0,所以$\lambda=\frac{-(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$,

所以$|\overrightarrow{PH}|=\sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2}=|\lambda|\sqrt{A^2+B^2}=|\frac{-(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}|\sqrt{A^2+B^2}$,

即:$d=|\overrightarrow{PH}|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

8 用向量射影公式推导点到直线的距离公式

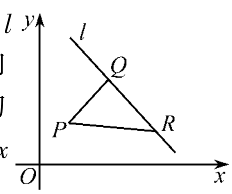

图 5

如图5,设$R(x,y)$是直线l上的任意一点,直线l的方向向量为$\boldsymbol{m}=(-B,A)$,则直线l的法向量为$\overrightarrow{PQ}=(A,B)$,$\overrightarrow{PR}=(x-x_0,y-y_0)$,

所以$d=\frac{|\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

点评　向量是一种很好的工具,用向量处理,既避开了分类讨论,又体现了平面向量的工具性,会有事半功倍的效果.

9　利用两条平行直线间的距离处处相等推导点到直线距离公式

如图6,如果过点$P(x_0,y_0)$作l:$Ax+By+C=0$的平行线l':$Ax+By-Ax_0-By_0=0$,那么直线l'上任意一点到l的距离都等于点P到直线l的距离,既然可以任意取点,我们应设法使这个点到直线l的距离容易求得,选取直线l'与x轴的交点$G(\frac{Ax_0+By_0}{A},0)$,过G作l的垂线,垂足为H,设l与x轴相交于点$F(-\frac{C}{A},0)$,容易求得$FG=\frac{Ax_0+By_0+C}{A}$,角α与直线l的倾斜角β相等或互补,所以$\tan\alpha=\pm\tan\beta=\mp\frac{A}{B}$,所以$|\sin\alpha|=|(\mp\frac{A}{B})\div\sqrt{1^2+(\mp\frac{A}{B})^2}|=\frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,从而$d=|GH|=|FG||\sin\alpha|=|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}|\cdot\frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

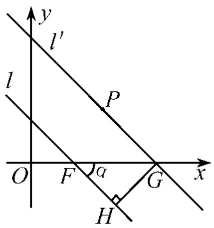

图6

10　从最简单最特殊的引理出发推导点到直线距离公式

引理　坐标原点到直线l:$Ax+By+C=0$的距离$h=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

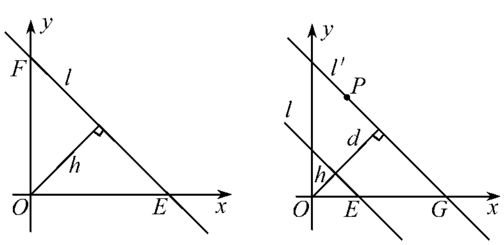

图7

简证　如图7,先从原点到直线的距离这一特殊情形入手,设直线l与x轴、y轴分别交于点E、F,则点E、F的坐标分别是$(-\frac{C}{A},0)$、$(0,-\frac{C}{B})$,由三角形面积得:$\frac{1}{2}EF\cdot h=\frac{1}{2}OE\cdot OF$得$h=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.由平行直线系求出过点$P(x_0,y_0)$且与$l$平行的直线$l'$的方程:$Ax+By-Ax_0-By_0=0$,设直线$l$和$l'$分别与$x$轴交于点$E$、$G$,则点$E(-\frac{C}{A},0)$、$G(\frac{Ax_0+By_0}{A},0)$,由$l\parallel l'$得$\frac{d}{h}=\frac{EG}{OE}$.所以$d=\frac{EG}{OE}\cdot h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|}\div\frac{|C|}{|A|}\cdot\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

11　通过平移坐标系推导点到直线距离公式

如图8,如果点$P(x_0,y_0)$是坐标原点就好了,为此,我们以点$P(x_0,y_0)$为原点建立直角坐标系$x'O'y'$,并使坐标轴x',y'分别与坐标轴x,y平行.设直线l在新坐标系中记为l',设任意点G在新旧坐标系中的坐标分别是(x',y')、(x,y).则由$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'G}$,得$(x,y)=(x_0,y_0)+(x',y')$,所以$x=x_0+x'$,$y=y_0+y'$,所以直线$l$在新坐标系中的方程是:$A(x'+x_0)+B(y'+y_0)+C=0$,即$Ax'+By'+Ax_0+By_0+C=0$.点$O'$到直线$l'$的距离就是点$P(x_0,y_0)$到直线$l$的距离,由引理可得:$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

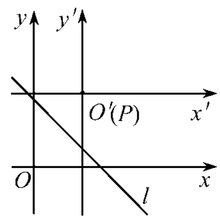

图8

12　由直线与圆的位置关系推导点到直线距离公式

如图9,当以点$P(x_0,y_0)$为圆心的圆与直线l:$Ax+By+C=0$相切时,圆的半径就是点$P(x_0,y_0)$到直线l:$Ax+By+C=0$的距离,于是,问题转化为当以点$P(x_0,y_0)$为圆心的圆与直线l只有一个交点时,求圆的半径,联立方程$\begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\end{cases}$

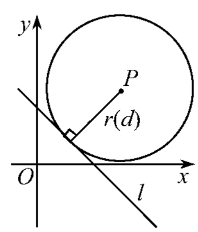

图9

消y整理得关于x的一元二次方程:$\frac{A^2+B^2}{B^2}x^2+2(\frac{C}{B}+y_0-x_0)x+x_0^2+(\frac{C}{B}+y_0)^2-r^2=0$,令判别式$\Delta=[2(\frac{C}{B}+y_0-x_0)]^2-4\cdot\frac{A^2+B^2}{B^2}\cdot[x_0^2+(\frac{C}{B}

$+y_0)^2-r^2]=0$得: $r^2=\dfrac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$, 所以 $d=r=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

13 用直线的参数方程推导点到直线距离公式

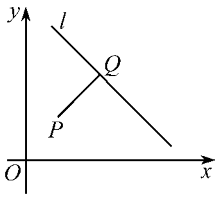

图 10

如图10,由直线参数方程的几何意义知 $|t|=|PQ|$,

(1) $B>0$时, 过点 P 作直线 l的垂线, 垂足为 Q, 则直线 PQ的标准参数方程为:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ y=y_0+t\cdot\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}(t\text{ 为参数}),$$

将直线 PQ的参数方程代入直线 l的方程得: $A\cdot(x_0+t\cdot\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}})+B\cdot(y_0+t\cdot\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}})+C=0$, 解之得点 Q 对应的参数 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

所以 $PQ=-\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, 所以 $d=|PQ|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(2) 当 $B<0$时, 直线 PQ 的标准参数方程为:

$$\begin{cases} x=x_0-t\cdot\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ y=y_0-t\cdot\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}(t\text{为参数})$$

同理可得 $PQ=\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $d=|PQ|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

教材提到利用过已知点作直线垂线求出交点,再利用两点间距离公式求解的方法经过学生尝试,虽然运算量较大, 但是这种思路最自然, 我们不应轻易放弃, 因为教师不应一开始上解析几何, 就给学生一个"有一点运算量就懒得动手算"的示范, 而解析几何正是从求准、求快、求简等方面训练学生计算能力的绝佳材料, 没有繁琐运算的亲身体验, 哪来"求简"的动力?我们应引导学生"穷则思变": 能否在这种思路的基础上作适当的改进?能否从不同的角度来思考这一问题?这既加强了知识间的联系, 又锻炼和提高了学生运用已有知识分析问题、解决问题的能力.

参考文献

[1] 薛彬. 想法是怎样形成的? [J] 中学数学教学参考. 2007, 8

[2] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书(人教版)(必修)第二册(上)[M]第51~52页. 北京: 人民教育出版社, 2004, 4

作者简介 余树林, 1973年8月出生, 中教|级教师, 鄂州市首届优秀数学教师, 鄂州市教改先进个人, 辅导多名学生参加全国数学竞赛获奖, 获优秀教练员称号. 近几年, 有十余篇论文在《中学数学杂志》、《中学数学研究》、《数学通讯》、《中学数学教学参考》等刊物发表. 多篇论文获省市|等奖.

向量替斜率 解题免讨论

江西省永丰中学 331500 刘 忠 (特级教师)

直线是由一个点和一个方向确定的, 而方向又可用它的倾斜角来确定. 由于斜率可以直接反映于它的方程中(特别是斜截式), 所以通常用斜率来确定一条直线的方向. 又由于并不是任何直线都有斜率, 所以在对一些与直线斜率有关的问题的解决时就不得不分斜率存在与否进行讨论了. 考虑到任何直线的方向都可由它的方向向量来确定, 所以在解决一些与直线斜率有关的问题时用它的方向向量来代替斜率就可以避免繁杂的讨论, 而使过程简洁明快. 本文介绍利用直线的方向向量和法向量来解决一些与斜率有关的问题的方法, 供大家参考.

1 直线的方向向量与法向量

1.1 直线 l: $Ax+By+C=0$的方向向量

若直线 l经过 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 则直线 l上的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$及与它平行的向量都称为直线的方向