

國立基隆女中 112 學年第 2 次教師甄試 筆試試題 數學科

一、填充題：60 分(每題 5 分)

1. 滿足聯立不等式 $\begin{cases} |x| + |y| + |x + y| \leq 100 \\ x^2 + y^2 \leq 2500 \end{cases}$ 的點所形成的區域面積為_____。
2. 設 a 為整數，方程式 $x^2 + (a - 53)x + (2a + 22) = 0$ 的解為兩相異質數 p, q ，其中 $p > q$ ，則 $p =$ _____。
3. 設 $y = |\sqrt{3} \sin x - \cos x|$ 的圖形與 x 軸、 y 軸、直線 $x = 2\pi$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體為 S ，旋轉體 S 的體積為_____。
4. 平面上，設 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，其中 $\angle C$ 為直角且 $\overline{AC} = 1$ ，在 \overline{AB} 上取 n 等分點 $P_0 = A, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n = B$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{CP_k} =$ _____。
5. 設 $x_n = p^n + q^n$ ，其中 n 為正整數且 p, q 為方程式 $x^2 - 5x - 4 = 0$ 的兩實根，若 x_{n+2} 可表成 $ux_{n+1} + vx_n$ ，則實數對 $(u, v) =$ _____。
6. 若複數 z 滿足 $z \times \bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 8$ 且 $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{6}$ ，則 $z =$ _____。

7. 已知空間中三個非零向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 兩兩的夾角是 60° ，且

$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$ ，若兩向量 \vec{u} 與 \vec{v} 滿足

$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{a}) = \vec{u} \cdot \vec{b}$ ， $\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{a}) = \vec{v} \cdot \vec{c}$ ，則 $|\vec{u} - \vec{v}|$ 的最大值為_____。

8. 在單位正方體 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若點 E 為 $\overline{A_1B_1}$ 的中點，則兩直線 $\overline{D_1E}$ 與 $\overline{BC_1}$ 的距離為_____。

9. 設 z 為複數，且 z 為方程式 $x^5 + x^4 + 1 = 0$ 的根，則滿足 $|z|=1$ 的所有根之和為_____。

10. 已知空間中三直線 $L_1: \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ， $L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{3}$ ，

$L_3: \frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ，若直線 L_1 與 L_2 、 L_3 均相交，則 $a:b:c =$ _____。

11. 10 名女學生排成一排而坐，然後每人隨機戴上一頂藍色、綠色或是紅色的帽子，則每個人都找得到最少一名鄰座（坐在她左邊或是右邊）者戴上和自己相同顏色帽子的機率是_____。

12. 設 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數，則 $\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2^{2024}}{3}\right]$ 的

末兩位數為_____。

二、計算題：30 分(每題 10 分)

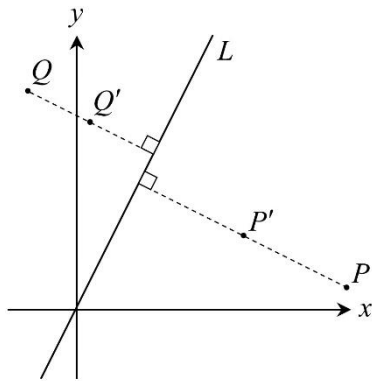
1. 設 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, & x > 1 \\ c, & x = 1 \\ ax^2 - bx + 1, & x < 1 \end{cases}$ 為可微分函數，求實數 $a, b,$ 和 c 。

2. 過直線 $x - 2y + 13 = 0$ 上一動點 A (A 不在 y 軸上) 作拋物線 $y^2 = 8x$ 的兩條切線， M, N 為切點，直線 AM, AN 分別與 y 軸交於點 B, C 。

(1) 已知直線 MN 恆過一定點，試求此定點坐標；

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的外接圓恆過一定點，試求此定點坐標並求此圓半徑的最小值。

3. $m \in \mathbb{R}$ ，令直角坐標平面上直線 L 的方程式為 $y = mx$ 。二階方陣 T 所對應的線性變換 $P' = TP$ ，是將點 P 到 L 的垂直距離縮小一半得到 P' 點。 $m = 2$ 時的示意圖如下， P, Q 兩點分別變換至 P', Q' 。試求此二階方陣 T 。



三、證明題：10 分。

1. 設平面四邊形 $ABCD$ 的四邊長 $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ ，

(1) 試求此四邊形面積的最大值；

(2) 若 a, b, c, d 為四個連續的正整數。證明：四邊形 $ABCD$ 面積的最大值不為整數。