

112 學年度臺中市政府教育局受託辦理本市立國民中學
(含本市立高級中等學校附設國中部)教師甄選

數學科題本

※請先確認你的答案卡、准考證與座位號碼是否一致無誤。

請閱讀以下測驗作答說明

測驗說明：

這是 112 學年度臺中市政府教育局受託辦理本市立國民中學(含本市立高級中等學校附設國中部)教師甄選數學科題本，題本採雙面印刷，共 40 題，每題只有一個正確或最佳的答案。測驗時間共 70 分鐘，作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

注意事項：

1. 所有試題均為四選一的選擇題，答錯不倒扣。
2. 依試場規則規定，答案卡上不得書寫姓名及任何標記。故意污損答案卡、損壞試題本，或在答案卡上顯示自己身份者，該科測驗不予計分。

作答方式：

請依照題意從四個選項中選出一個正確或最佳的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡上相應的位置劃記，請務必將選項塗黑、塗滿。如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，重新塗黑答案。

試題公告
僅供參考

選擇題 (共 40 題，每題 2.5 分，共 100 分)

1. 求方程式 $|x+3| - (x+1) - |x-1| = 0$ ，所有解的和為多少？

- (A) -3
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 2

2. 求 $\int_{-1}^2 x^{-3} dx = ?$

- (A) $-\frac{5}{8}$
- (B) 0
- (C) $\frac{3}{8}$
- (D) 發散

3. 下列選項中的級數，何者是發散級數？

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{e^n}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

4. 若 A 是一個 2×2 的實數矩陣且滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $A \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，則 A 的反矩陣 $A^{-1} = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

試題公告
僅供參考

5. 已知 H 和 K 都是群 G 的子群而且 K 是 H 的子群，若 G 的階數(order)是24且 K 的階數是3，則下列選項中何者不可能是 H 的階數？

- (A) 3
- (B) 6
- (C) 8
- (D) 12

6. 某校中有60%的學生不戴戒指也不戴項鍊，20%的學生戴戒指，30%的學生戴項鍊。若隨機選出一位學生，則該生戴戒指且戴項鍊的機率為何？

- (A) 0.1
- (B) 0.3
- (C) 0.4
- (D) 0.5

7. 設 a 為正整數，若 a^2 的十位數字是5，則 a^2 的個位數字為何？

- (A) 1
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 6

8. 已知 $E(X) = 1$ 且 $E[(X+1)^2] = 8$ ，求 $Var(1-3X) = ?$

- (A) 24
- (B) 28
- (C) 32
- (D) 36

9. 設 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ ，若 $f(1) + f(2) + \dots + f(10) = \frac{a}{b}$ (a, b 互質)，求 $a + b = ?$

- (A) 124
- (B) 247
- (C) 286
- (D) 329

10. 在 $\triangle ABC$ 中，邊 \overline{AB} , \overline{AC} 上各取一點 D, E ，而 \overline{BE} 交 \overline{CD} 於 F ，若 $\overline{AB} = 4\overline{AD}$, $\overline{AC} = 4\overline{AE}$ ，則 $\overline{CD} = k \times \overline{DF}$ ，求 k 之值為
- (A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6

11. 下列選項中的定積分，何者可以用來計算由直線 $y = x - 1$ 和拋物線 $y^2 = 2x + 6$ 所圍成之封閉區域的面積？

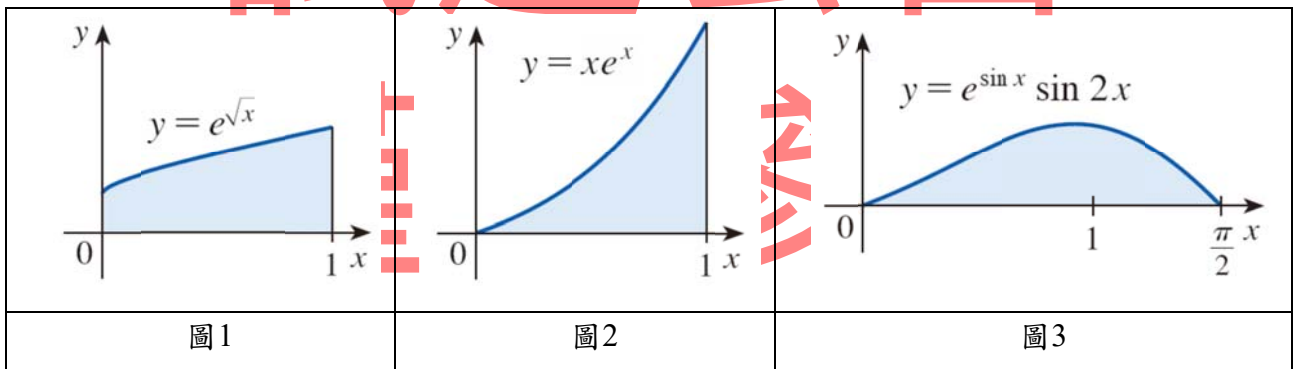
(A) $\int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$

(B) $\int_{-3}^5 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$

(C) $\int_{-2}^4 (x - 1 - \sqrt{2x + 6}) dx$

(D) $\int_{-3}^5 (\sqrt{2x + 6} - x + 1) dx$

12. 下列選項中的敘述，何者正確？



- (A) 圖1和圖2的陰影區域，面積相等。
- (B) 圖1和圖3的陰影區域，面積相等。
- (C) 圖2和圖3的陰影區域，面積相等。
- (D) 圖1、圖2和圖3的陰影區域，面積都不相等。
13. 曲面 $\cos(xyz) = x^2y^2 + z$ 上在點 $(1, -1, 0)$ 的切平面方程式為何？
- (A) $z = 2x - 2y - 4$
- (B) $z = -2x + 2y + 4$
- (C) $z = -x + y + 2$
- (D) $z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 1$

14. 函數 $f(x)$ 滿足下列條件：

$$f(1)=2、f(2)=5、f'(3)=4、f'(4) \text{ 不存在}、\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=2、\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=3$$

甲、乙、丙、丁四位學生分別做了下列四個推論：

甲生：因為 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=2=f(1)$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 時連續，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 時也可微分。

乙生：因為 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=3 \neq f(2)$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 時不連續，因此 $f(x)$ 在 $x=2$ 時也不可微分。

丙生：因為 $f'(3)=4$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=3$ 時可微分，因此 $f(x)$ 在 $x=3$ 時也連續。

丁生：因為 $f'(4)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=4$ 時不可微分，因此 $f(x)$ 在 $x=4$ 時也不連續。

試問哪些學生的推論是正確的？

(A) 甲生、丙生

(B) 乙生、丙生

(C) 乙生、丁生

(D) 丙生、丁生

15. 設可微函數 f 滿足 $f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x$ ，則 $f'(2)=?$

(A) 1

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{9}$

(D) $\frac{4}{9}$

16. 已知 $f(1)=12$ 且 $f'(x) \geq 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ，則下列選項中何者不可能是 $f(4)$ 的值？

(A) 20

(B) 30

(C) 40

(D) 1000

17. 試問滿足不等式 $2x^3 + 3y^2 \leq 400$ 之正整數解 (x, y) 有幾組？

(A) 47

(B) 48

(C) 49

(D) 50

18. 用2, 3, 4, 5, 6, 7這六個數，可以組成多少個不重複的4位偶數，但3不在百位上？
- (A) 120
(B) 126
(C) 132
(D) 144
19. 下列何者不是11 的倍數？
- (A) $56^{111} - 1$
(B) $2^{998} + 8$
(C) $68^{33} + 3$
(D) $18^{50} + 9$
20. 袋中有紅球及白球共20顆，從袋中任意取出兩顆球，若取到紅球個數的期望值為 $\frac{4}{5}$ ，則袋中有幾顆紅球？
- (A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 14
21. 設 k 為任意實數的情況下， $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 + 4k - 2a = 0$ 恆為一圓，求 a 的範圍為何？
- (A) $a < 2$
(B) $a < 1$
(C) $a > 1$
(D) $a > 2$
22. 曉華玩10次投籃遊戲，他在第6, 7, 8, 9次分別投進24球、14球、12球和22球，而他前9次投球的平均進球數比前5次投球的平均進球數要高。若他投10次的平均進球數超過18球，則他第10次投球其進球數最小值是多少？
- (A) 18
(B) 19
(C) 20
(D) 21

23. 投擲一公正的六面的骰子三次，設三次中至少出現一次4點的事件為 A ，三次中至少出現一次2點的事件為 B ，則事件 A 和 B 至少有一發生的機率為 $\frac{a}{b}$ (a, b 互質)，求 $a + b = ?$

- (A) 11
- (B) 21
- (C) 34
- (D) 46

24. 四邊形 $ABCD$ 中， E 為 \overline{BC} 的中點， \overline{AE} 交 \overline{BD} 於 F ， $\overline{DF} = \overline{BF}$ ， $\overline{AF} = 2\overline{EF}$ 則 $k \times (\Delta ACD$

- 的面積) $= \Delta ABC$ 的面積，求 k 之值為
- (A) 2
 - (B) 3
 - (C) 4
 - (D) 5

25. 設函數 $f(x) = \cos^2 2x + 6\sin^2 x + 3$ ，則 $f(x)$ 最小值為 a ，最大值為 b ，求 $2b - a = ?$

- (A) 8
- (B) 12
- (C) 16
- (D) 20

26. 設 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + nk + n^2}} = \ln \alpha$ ，則 α 之值為何？

- (A) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
- (B) $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- (C) $1 + \sqrt{3}$
- (D) $1 + \sqrt{2}$

27. 設區域 $R = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$ ，求重積分 $\iint_R 9\sqrt{x^2 + y^2} \, dA = ?$

- (A) 8
- (B) 14
- (C) 15
- (D) 16

28. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 為矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的三個特徵值(eigenvalues)，

則 $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = ?$

(A) 57

(B) 60

(C) 63

(D) 66

29. 設三正數 x, y, z 之和為 2，當 $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ 時 xy^2z^3 有極大值，則 $3\alpha + \gamma$ 之值為何？

(A) 2

(B) 2.5

(C) 3

(D) 3.5

30. 設 $x = \sqrt[3]{\sqrt{17}+3} - \sqrt[3]{\sqrt{17}-3}$ ，則 $x^3 + 6x + 7$ 之值為何？

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 13

31. 設區間 (a, b) 為冪級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} (x-1)^k$ 之收斂域，則 $a + 2b$ 的值為何？

(A) $2 + \frac{1}{e}$

(B) $3 + \frac{1}{e}$

(C) $2 + e$

(D) $3 + e$

試題公告
僅供參考

32. 求極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 - x} - x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 不存在

33. 設線性轉換 $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$, $T(f)(x) = 3f'(x) + \int_0^x 2f(t) dt$, 則 $\text{nullity}(T) = ?$

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

34. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 下列選項中, 何者不是 A 的特徵值?

(A) -2

(B) 2

(C) 4

(D) 6

35. 設 $a \geq 3$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, 求 $a + b + c \leq 15$ 的整數解 (a, b, c) 共有多少組?

(A) 165

(B) 220

(C) 310

(D) 345

36. 若 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 有一解為 (m, n) , 則 $\begin{cases} a_1x + 2b_1y + 4c_1 = 0 \\ a_2x + 2b_2y + 4c_2 = 0 \end{cases}$ 的解為 (rm, sn) , 求 $r + s = ?$

(A) 3

(B) 6

(C) 8

(D) 12

37. 設 $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ，而 $A + A^2 + \dots + A^n = \begin{pmatrix} 2(3^n - 1) & a \\ b & c \end{pmatrix}$ ，求 $b + c = ?$

- (A) $3^n - 1$
- (B) $1 - 3^n$
- (C) $4(3^n - 1)$
- (D) $4(1 - 3^n)$

38. 方程式 $x^3 - y^3 + 6x^2 + 2x + y + 2 = 0$ 的整數解 (x, y) 的個數有多少個？

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 3
- (D) 無窮多個

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} [2n^2 (\frac{r}{n} - \sum_{k=1}^r \frac{1}{n+k})] = ?$

- (A) $r + 1$
- (B) $r^2(r + 1)$
- (C) $r(r + 1)^2$
- (D) $r(r + 1)$

40. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 所對應的邊其邊長分別為 a ， b ， c ，已知 $\frac{b}{a} = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{bc}$ ，

$\frac{c}{b} = \frac{|c^2 + a^2 - b^2|}{ca}$ ， $\frac{a}{c} = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{ab}$ 且 $a < b < c$ ，求 $\angle A$

- (A) $\frac{\pi}{7}$
- (B) $\frac{2\pi}{7}$
- (C) $\frac{\pi}{9}$
- (D) $\frac{2\pi}{9}$

試題公告
僅供參考