

國立竹東高級中學 112 學年度第一次教師甄選 數學科筆試試題

一、填充題：每題 5 分，共 50 分

1. 在 $1, 2, \dots, 2023$ 這 2023 個數字的直線排列中 $(a_1, a_2, \dots, a_{2023})$ 中，滿足下列條件的排列有 _____ 個。

排列條件：恰有一個 $i \in \{1, 2, \dots, 2023\}$ ，使得
$$\begin{cases} a_1 < a_2 < \dots < a_i \\ a_i > a_{i+1} \\ a_{i+1} < a_{i+2} < \dots < a_{2023} \end{cases}$$

ANS : $2^{2023} - 2023$

2. 設 a, b, c, d 為實數，已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b & 16 & -9 \\ c & d & -7 & 5 \end{bmatrix}$ 經過列運算後得 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ，

則矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為 _____。

ANS : $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. 若 α, β 為實數，且滿足 $\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha + 13\alpha = 2023 \\ \beta^3 + 3\beta + 4\beta = -2015 \end{cases}$ ，試求 $\alpha + \beta =$ _____。

ANS : 送分

4. 實係數二次多項方程式 $f(x) = 0$ 有一根為 2，且方程式 $f(f(x)) = 0$ 恰只有一實根為 5，則 $f(0) =$ _____。

ANS : $\frac{-32}{9}$

5. 令 $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n}$ ， $b_n = a_n + \frac{1}{a_n}$ ，求 b_{2023} 的個位數字為 _____。

ANS : 0

6. 已知 z_1, z_2 為複數，且 $|z_1| = |z_1 - z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z_2| = 1$ ，試求 $|z_1 - 1|^2 + |z_2 - 1|^2$ 的最小值為 _____。

ANS : $5 - 2\sqrt{5}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分別在 \overline{BC} 與 \overline{AC} 上且 \overline{AD} 是 \overline{BC} 邊的中線， \overline{BE} 是 $\angle B$ 的角平分線。若 $\overline{AD} = \overline{BE}$ 且 $\overline{AD} \perp \overline{BE}$ ，已知 $\overline{BE} = \overline{AD} = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長為_____。

ANS : $3\sqrt{13} + 3\sqrt{5}$

8. 已知函數 $f(x) = (3-p)x^2 + 6x + (p+4)$ ，在 $x > 0$ 時，其函數值恆為正數，則滿足條件的整數 p 有_____個。

ANS : 8

9. 已知實係數三次函數 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 滿足下列條件：

- (1) 若 $f(\alpha) = \beta$ ，則 $f(-2-\alpha) = -4-\beta$ 恆成立，
- (2) 存在水平直線與函數 $y = f(x)$ 的圖形有三點交點，
- (3) a, d 為整數且 $ad = 3$ ，

則 $f(x) =$ _____。(寫成 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的形式)

ANS : $-3x^3 - 9x^2 - 5x - 1$

10. 甲、乙兩人參加同一考試，甲做錯全部試題的 $\frac{1}{4}$ ，乙做錯9題，而兩人同時做錯的題數為全部試題的 $\frac{1}{6}$ ，若兩人同時做對 n 題($n \geq 20$)，則滿足條件的所有 n 值之總和為_____。

ANS : 59

二、計算證明題：50分(請詳細寫下過程，否則不予計分)

1. 設 t 是任意實數，試求 $y = \sqrt{4+4\sin t} + \sqrt{2+2\cos t}$ 的最大值為何？(8分)

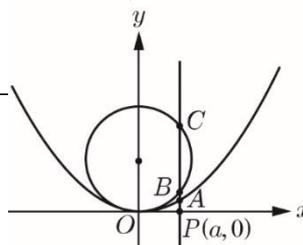
ANS : $2\sqrt{5}$

2、如圖，已知 $a > 0$ ，過 $P(a, 0)$ 作一條鉛直線 L ，若 L 與圓 $C: x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 及拋物線

$\Gamma: y = \frac{x^2}{5}$ 分別交於 C, B, A 三點，試求 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} =$

(8 分)

ANS : $\frac{4}{5}$



3、設 a, b 為非負整數， $ab \neq 1$ ，且 $k = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab - 1}$ 為非負整數。求所有可能的 k 值為何？

(8 分)

ANS : 0、4、7

4、三角形 ABC ，其中 a, b 分別為 $\angle A, \angle B$ 的對應邊，則請將 $\tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ 用 a, b 表示，

並證明之。

(8 分)

ANS : $\frac{a-b}{a+b}$

5、計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n} \sqrt{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{n} \sqrt{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = ?$

(8 分)

ANS : $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

6、空間中兩點 $A(8, 0, 12), B(7, 13, 13)$ ，若 P 點在直線 $x + 1 = \frac{y}{2} = \frac{3-z}{-2}$ 上，則 $\overline{PA} + \overline{PB}$

最小值為何？此時的 P 點座標為何？

(10 分)

ANS : 15, $\left(\frac{17}{4}, \frac{21}{2}, \frac{27}{2}\right)$