

國立鳳山高中 112 年教師甄試數學科試題

注意：1. 請依題號順序作答，否則不予計分。

2. 填充題請自行標註題號，只需要填寫正確答案，不需填寫過程。

3. 計算題需要詳細過程，只填寫答案不予計分。

一、填充題(14 題，每題 5 分，占 70 分)

1. 最接近 $\frac{2022^4}{2023^3}$ 的正整數為_____。

2. 坐標空間中，考慮一長、寬、高分別為 5、3、2 的長方體，並固定一頂點 O 。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P 、 Q ，試問所得 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 之期望值為_____。

3. $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{BC} 上且 \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的內角平分線，若 $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{DC} = 1$ ，試求 $\triangle ABC$ 面積的最大值。

4. 已知實數 x 、 y 滿足 $x + y = 4\sqrt{x+2} + 6\sqrt{y+1}$ ，當 $x = \alpha$ 、 $y = \beta$ 時 $x + y$ 有最大值，求實數 α 的值為_____。

5. 試求不等式 $(x - 2)^6 < x^3 - x^2 + 5x - 4$ 的解。

6. 已知 z 為非零的複數，若 0 、 z 與 z^3 在複數平面上恰可形成一個正三角形的三個相異頂點，設共有 n 個相異的 z 值，且其中 z 的主幅角（介於 $0^\circ \sim 360^\circ$ ）最大者為 ϕ ，則數對 $(n, \phi) =$ _____。

7. 設 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數，試求 $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1000} \right]$ 的末位數字。

8. 有一副撲克牌(不含鬼牌)遺失了兩張，若在已知抽出的三張牌皆為紅心的條件下，則遺失的兩張牌中紅心張數的期望值為_____張。(請用最簡分數表示)

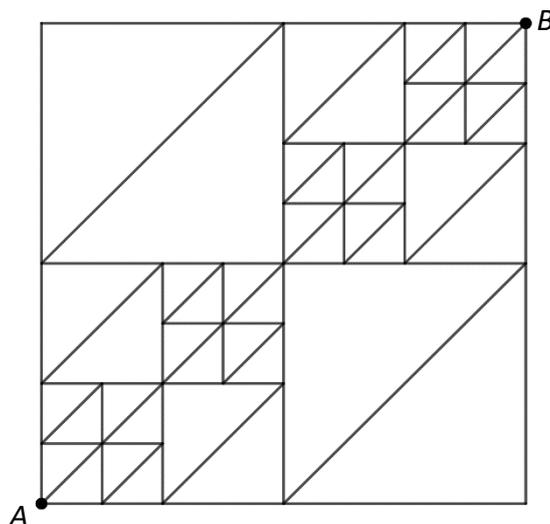
9. 設 $A(-1, 0), B(2, 0)$ ， $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B = 2\angle A$ ，則 C 點的軌跡方程式為_____。

(注意：必須寫出 x 的範圍，否則不給分。)

10. 假設方程式 $(\log ax)(\log ax^2) = 4$ 有兩個均大於 1 的不相等實根，試求實數 a 的範圍。

11. 求定積分 $\int_{-\frac{3}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} =$ _____。

12. 下圖中的街道圖，欲從 A 點走到 B 點，規定只能沿著街道向東「 \rightarrow 」、北「 \uparrow 」或東北「 \nearrow 」方向走，則有_____種走法。



13. 平面上有三個向量滿足 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} ，滿足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c} < 0$ 。今有實數 x 、 y ，使得 $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{c}$ 滿足 $0 \leq \vec{v} \cdot \vec{a} \leq 1$ 及 $0 \leq \vec{v} \cdot \vec{b} \leq 1$ ，則 $\vec{v} \cdot \vec{c}$ 的最小值為_____。

14. 設 $P(2, 3, -4)$ 為空間中一點，對於每個實數 k ，考慮 P 點與空間中直線

$$L_k: \frac{x-k}{2021} = \frac{y-k}{2022} = \frac{z-k}{2023} \text{ 的距離 } d_k, \text{ 試求所有 } d_k \text{ 的最小值。}$$

二、計算證明問答題（共 4 題，占 30 分）

1. 學生初學排列組合時，遇到下面的問題：

從甲、乙、丙...等 10 人中選出 4 人，至少含甲、乙、丙、丁四人中的一人，求有幾種選法？

小安的想法如下：

(1) 先從甲、乙、丙、丁 4 人中選 1 人 (C_1^4)。

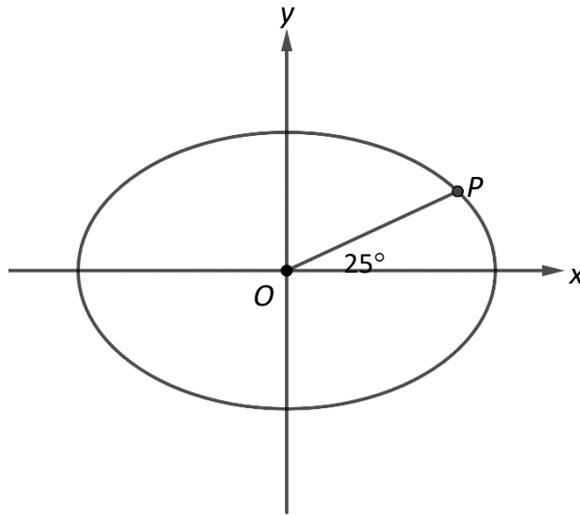
(2) 再從其餘 9 人中選 3 人 (C_3^9)。

故共有 $C_1^4 \times C_3^9$ 種方法。

假如你是小安的數學老師，你應如何跟他解釋這樣的解法不正確？並告訴他正確的解法。(5 分)

2. 一橢圓的方程式為 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，其圖形如下圖，已知 P 為橢圓 Γ 上一點，且 \overrightarrow{OP} 與 x 軸正向的夾角為 25° ，若點 $Q(3\cos 25^\circ, 2\sin 25^\circ)$ ，試以尺規作圖的方式，在下圖中標示出 Q 點的位置。(5 分)

(注意：請自行在答案卷畫出圖形，必須說明作圖步驟，不必實際使用圓規或直尺，也不必證明。)



3. 數線上有點 $P_1(x_1)$ 、 $P_2(x_2)$ 、 $P_3(x_3)$ 、……，且對所有正整數 n ，以下關係皆成立：
 P_{n+2} 為 $\overline{P_n P_{n+1}}$ 上滿足 $\overline{P_{n+2} P_n} : \overline{P_{n+2} P_{n+1}} = 3:1$ 的內分點。若 $x_1 = 1$ 、 $x_2 = 2$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 之值。
 (10 分)

4. 設 x, y, z 為正實數且 $xyz = 1$ ，試證明： $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq x + y + z$ 。(10 分)