

國立新竹女子高級中學 111 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選 數學科試題卷
公告版

一、 填充題（每格 5 分，共 70 分）

1. 下圖的積木為索碼立方體中的其中一塊元件，它是由四塊小正方體組成。假設小正方體的邊長為 1，則將這個元件平穩地置於桌面上時，它所有可能高度的最大值為_____。（下面示意圖的高度為 2）



2. 令二階方陣 $E_k = \begin{bmatrix} \cos k^\circ & \sin k^\circ \\ \sin k^\circ & -\cos k^\circ \end{bmatrix}$ ，則 2022 個方陣的乘積 $E_1 E_2 E_3 \dots E_{2022} =$ _____。

3. 在 C_0^{2022} 、 C_1^{2022} 、 C_2^{2022} 、 \dots 、 C_{2022}^{2022} 這 2023 個數之中，有_____個數是 3 的倍數。

4. 五邊形 $ABCDE$ ，在頂點 A 有一隻青蛙，每次青蛙會隨機往一個相鄰的頂點跳躍（也就是跳往相鄰頂點的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ），當再跳到 A 的時候即停止跳動。則該青蛙跳躍次數的期望值為_____。

5. 已知平面上三點 $A(8, 9)$ 、 $B(40, 136)$ 、 $C(103, 90)$ ，則在 $\triangle ABC$ 內部（不包含邊界）有_____個格子點。

6. 在凸四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\angle DAC = 12^\circ$ 、 $\angle CAB = 36^\circ$ 、 $\angle ABD = 48^\circ$ 、 $\angle DBC = 24^\circ$ ，則 $\angle BDC =$ _____。

7. 平面上的點 $P(x, y)$ 滿足

(i) $x^2 \leq 1$;

(ii) 從 P 點可向 $y = 2x^3 + 6x^2 - 1$ 的圖形作出三條相異切線，

則滿足上述條件之 P 點所形成的區域面積為_____。

8. 在下圖 3×3 方格表中，每一個方格均被塗上藍、黃、紅、黑四種顏色之一，相鄰方格不同色，若該方格表中恰有兩格塗上藍色，且藍色不可塗在中間及角落方格上（標號奇數的位置），則符合條件的著色方法有_____種。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

9. 有一台電腦每秒以相同的機率輸出一個數字 1 或 -1，若令 p_n 為輸出的前 n 個數字和為 3 的倍數之機率，則 p_n 的一般式為_____。（以 n 表示）

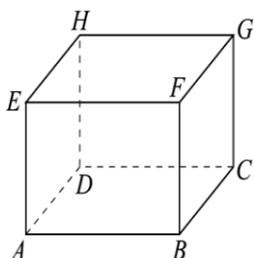
10. 已知 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，且 $4\vec{IB} + 4\vec{IC} = -5\vec{IA}$ ，設 R, r 分別為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與內切圓半徑，若 $r = 15$ ，則 R 之值為_____。

11. 已知拋物線 $\Gamma: y^2 = x$ 與圓 $C: (x-4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交於 P, Q, R, S 四點。則

(1) r 的範圍為_____

(2) 四邊形 $PQRS$ 面積為最大時，兩對角線 PR, QS 的交點坐標為_____。

12. 在正方體 $ABCD-EFGH$ 中， M 為 \overline{GH} 中點，平面 AFM 將正方體分割成體積為 V_1, V_2 的兩部分(其中 $V_1 \leq V_2$)，則 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值為_____。



13. 河內塔 (Tower of Hanoi) 是根據一個傳說形成的數學問題：

有三根杆子 A, B, C 。 A 杆上有 6 個穿孔圓盤，圓盤的尺寸由上到下依次變大。要求按下列規則將所有圓盤移至 C 杆：

- (i) 每次只能移動一個圓盤；
- (ii) 大圓盤不能疊在小圓盤上面。

此問題當「初始盤面為 6 個圓盤皆放在 A 杆上」時，最少步數為 63 步，我們將 63 步稱為該初始盤面的最佳解。若重新規定 6 個圓盤不一定都要放在 A 杆上，只要符合「大圓盤的下方都沒有較小的圓盤」，都是可行的初始盤面。則在這些初始盤面中，有_____種盤面的最佳解是 63 步。

二、 計算證明題 (每題 10 分，共 30 分。需詳列推導、證明過程，否則不予計分)

1. 設隨機變數 $X \sim G(p)$ ，試寫出 X 的變異數，並證明之。

2. 有一種被稱作「1A2B」的猜數字益智遊戲，規則如下：

首先出題者由 0, 1, 2, ..., 9 當中任取相異四個數字由左到右排成一列 (0 可以在最前面)，讓猜題者去猜這組數字。每次猜完數字後出題者會給猜題者提示，提示的口訣為「 $mAnB$ 」，其中 mA 表示所猜的數字當中有 m 個不但猜中了而且數字是在正確的位置， nB 表示所猜的數字當中有 n 個猜中了但是數字的位置不正確。例如題目為 7132，若猜題者猜 1234，則提示「1A2B」。若猜題者第 1 次猜 8013，出題者提示「0A4B」，請給出一個策略讓猜題者至多再三次可猜中這組數字。

3. 在正十邊形中，連接其中七條對角線，使其分割成八個互不重疊的三角形，這種分割方式我們將其稱之為正十邊形的三角化。請問在正十邊形中，有幾種三角化的方式，會使得分割出來的八個三角形中恰有一個銳角三角形。