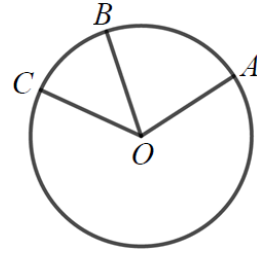


# 國立臺南女中 111 學年度第 2 次教師甄選答案(數學科)

填充題：(共 20 題，每題 5 分，共 100 分，答案請化為最簡分數或最簡根式)

1. 右圖是一個以  $O$  為圓心的圓，圓上有三點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，其中  $\widehat{AB} = 2\widehat{BC}$ 。若  $\triangle OAB$  的面積為 100， $\triangle OBC$  的面積為 80，則  $\triangle OAC$  的面積為\_\_\_\_\_。



2. 將  $(4+1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)(4^{16}+1)$  全部乘開後為\_\_\_\_\_位數字。  
(已知  $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ )

3. 每次過年奶奶發紅包時，為了樂趣都會有加碼獎金，今年訂下的遊戲規則如下：每個來領壓歲錢的孫子都發一個 2000 元的紅包，並且另外投擲 2 個公正的骰子，當點數和為  $k$  時，就取  $k$  個 50 元硬幣投擲一次，每個硬幣出現正反面的機會均等，出現正面的 50 元硬幣就當作加碼獎金。已知奶奶有 6 個孫子，試問她今年發出金額的期望值為\_\_\_\_\_元。

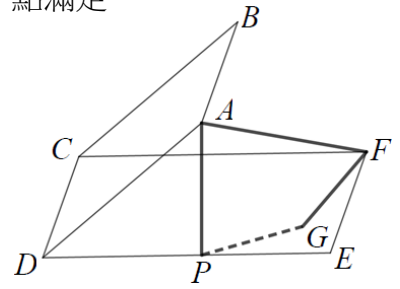
4. 已知一圓  $\Gamma$  通過  $O(0, 0)$ 、 $A(8, 0)$ 、 $B(0, 6)$  三點，若直線  $L$  與直線  $AB$  平行且與圓  $\Gamma$  相切，其切點在第一象限，則直線  $L$  的  $x$  截距等於\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

5. 設  $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 、 $C(0, 1)$  為坐標平面上四點，過  $C$  點作一直線  $L$  使其平分  $\triangle OAB$  之面積，若直線  $L$  的方程式為  $x+by+c=0$ ，則數對  $(b, c)=$ \_\_\_\_\_。

6. 如右圖，空間中，設矩形  $ABCD$  與矩形  $CDEF$  的二面角為  $60^\circ$ ， $\overline{AD} = 10\sqrt{3}$ ，

$\overline{AF} = 25$ ， $P$  為  $\overline{DE}$  上一點，滿足  $\overline{AP} \perp \overline{DE}$ ， $G$  為平面  $CDEF$  上一點滿足

$\overline{AF} \perp \overline{FG}$ ，且  $\overline{PG} = 20\sqrt{2}$ ，則  $\overline{FG} =$  \_\_\_\_\_。



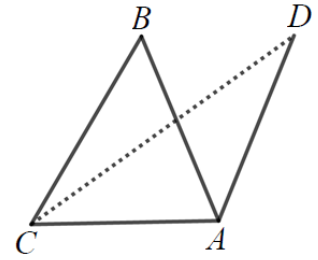
7. 坐標平面上，設  $O$  為原點， $A$ 、 $B$  為直線  $L: 6x + 8y - 5 = 0$  上相異兩點且  $\angle AOB = 90^\circ$ ，若圓  $C: x^2 + y^2 = k$  與  $\triangle OAB$  恰交 3 個點，則  $k$  的最小值為 \_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

8. 設  $f(x)$  為實係數三次多項式，若  $f(x)$  除以  $x-2$  的餘式為  $-5$ ，且  $(x+1)f(x)$  除以  $x^3 - 3$  的餘式為  $3x-1$ ，則多項式  $f(x)$  的各項係數總和為 \_\_\_\_\_。

9. 設  $a$ 、 $b$  皆為實數，已知  $f(x) = \int_0^x (at^3 + bt^2 - 9) dt$  在  $x=3$  有最小值且  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 32$ ，則  $2a - b =$  \_\_\_\_\_。

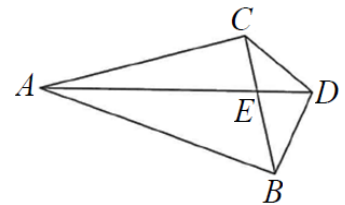
10. 已知三次函數  $f(x)$  在  $x=0$  的一次近似為  $y = x + 5$ ，且對稱中心為  $(1, 8)$ ，則此函數的最高次項係數為 \_\_\_\_\_。

11. 如右圖， $\triangle ABC$  為銳角三角形，且  $\triangle ABC$  的面積為  $4\sqrt{3}$ ，以  $A$  點為中心將  $B$  點順時針旋轉  $45^\circ$  至  $D$  點，試求  $\overline{CD}$  的最小值為\_\_\_\_\_。



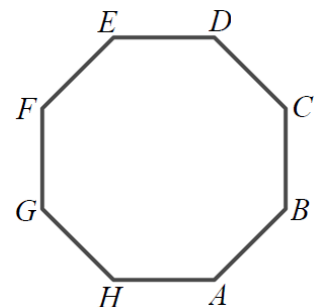
12. 設  $\{x\}$  表實數  $x$  的小數部分，例如： $\{2\} = 0$ ， $\{1.3\} = 0.3$ ， $\{-0.1\} = 0.9$ ，若方程式  $\{x\} - kx + 3k = 0$  恰有三個相異的實數解  $x$ ，則實數  $k$  的取值最佳範圍為\_\_\_\_\_。

13. 如右圖，四邊形  $ABDC$  的兩對角線  $\overline{BC}$  與  $\overline{AD}$  相交於  $E$  點，已知， $\overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$  其中  $m > 0$ ，若  $\triangle ACE$  的面積為 1，則  $\triangle ABE$  與  $\triangle CDE$  之面積和的最小值為\_\_\_\_\_。

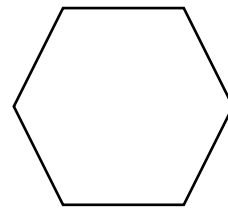


14. 籃球賽上，一場比賽的得分數、籃板數、助攻數、抄截數、阻攻數是評估球員表現的重要指標，當球員在一場比賽中有某兩項指標達兩位數，我們就稱該球員獲得「*Double doubles*」。某籃球隊共有 3 位明星球員，每場比賽 3 位明星球員都會上場。已知上個賽季共比賽 40 場，經過統計，3 位明星球員得到「*Double doubles*」的比賽場數分別有 15、16、17 場，3 位明星球員均得到「*Double doubles*」的比賽有 5 場，恰 2 位明星球員得到「*Double doubles*」的比賽有 15 場。則 3 位明星球員均未得到「*Double doubles*」的場數共計有\_\_\_\_\_場。

15. 一隻青蛙在如右圖正八邊形的池塘頂點間移動，除了頂點  $E$  之外，青蛙每次可由其餘 7 個頂點之一跳到兩相鄰頂點中的任一點(例如：從  $B$  點跳到  $A$  或  $C$  點；從  $C$  點跳到  $B$  或  $D$  點)，且當青蛙跳到頂點  $E$  時，則停止移動。試求青蛙從頂點  $A$  出發，跳躍 16 次到達  $E$  點的跳法有\_\_\_\_\_種。



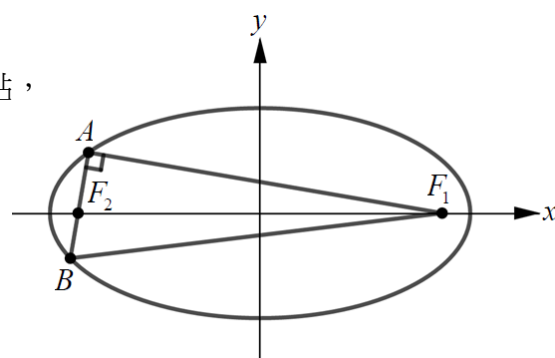
16. 如右圖，從邊長為 1 的正六邊形的 6 個頂點中，隨機選取 2 個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到 2 個頂點間距離長度的期望值為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數及根式)



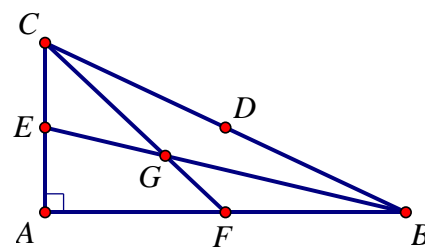
17. 有一組二維數據如右表所示，請從這六筆資料中，去掉一筆資料，使得  $x$  與  $y$  資料的相關係數最小，若此時  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y = mx + k$ ，則數對  $(m, k) =$ \_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

$x$	8	9	10	11	12	13
$y$	11	12	10	8	9	12

18. 如右圖，橢圓  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$  中， $F_1$  與  $F_2$  分別為右焦點與左焦點， $\overline{AB}$  為過  $F_2$  的一焦弦滿足  $\angle BAF_1 = 90^\circ$ ，且  $\overline{AF_2} < \overline{AF_1}$ ，則  $\triangle ABF_1$  的內切圓半徑為\_\_\_\_\_。



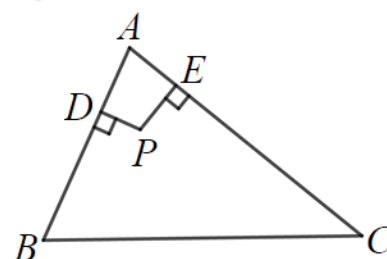
19. 如右示意圖，直角三角形  $ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，點  $D, E, F$  分別為  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  之中點， $\overline{BE}$  與  $\overline{CF}$  交於點  $G$ ， $\overline{BC} = 18$ ， $\angle BGC = 150^\circ$ ，則  $\triangle GBC$  的面積為\_\_\_\_\_。(化為最簡根式)



20. 如右圖， $P$  為  $\triangle ABC$  內部一點， $\tan A = \sqrt{15}$ ， $P$  對  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的垂足  $D$ 、 $E$

分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上，且滿足  $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{1}{4}$ ，若  $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，

則  $3x + 5y$  的最大值為\_\_\_\_\_。



**答案** : 1. 45    2. 19    3. 13050    4.  $\frac{49}{3}$     5. (-4, 4)

6. 20    7.  $\frac{1}{4}$     8. 4    9. 49    10. -1

11.  $4\sqrt[4]{6}$     12.  $\frac{1}{4} < k < \frac{1}{3}$  或  $-1 < k < -\frac{1}{2}$     13.  $7+4\sqrt{2}$     14. 17    15. 3824

16.  $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}$     17.  $(-\frac{4}{5}, 18)$     18.  $\frac{24+4\sqrt{2}}{17}$     19.  $12\sqrt{3}$     20.  $\frac{8}{5}$

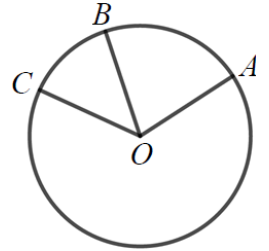
參考詳解

1. 右圖是一個以  $O$  為圓心的圓，圓上有三點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，其中  $\widehat{AB} = 2\widehat{BC}$ 。若  $\Delta OAB$  的面積為 100，  
 $\Delta OBC$  的面積為 80，則  $\Delta OAC$  的面積為\_\_\_\_\_。

Ans : 45

設圓半徑為  $r$ ， $\angle BOC = \theta$ ，則  $\angle AOB = 2\theta$ ， $\frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta = 100$ ， $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta = 80$

$$2 \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}r^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta}{\frac{1}{2}r^2 \sin \theta} = \frac{\frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta}{\frac{1}{2}r^2 \sin \theta} = \frac{5}{4} \rightarrow \cos \theta = \frac{5}{8} \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{39}}{8}$$



$$\frac{a\Delta OAC}{a\Delta OBC} = \frac{\frac{1}{2}r^2 \sin 3\theta}{\frac{1}{2}r^2 \sin \theta} = 3 - 4\sin^2 \theta = 3 - 4\left(\frac{\sqrt{39}}{8}\right)^2 = \frac{9}{16} \rightarrow a\Delta OAC = \frac{9}{16} \times 80 = 45$$

3. 每次過年奶奶發紅包時，為了樂趣都會有加碼獎金，今年訂下的遊戲規則如下：每個來領壓歲錢的孫子都發一個 2000 元的紅包，並且另外投擲 2 個公正的骰子，當點數和為  $k$  時，就取  $k$  個 50 元硬幣投擲一次，每個硬幣出現 正反面的機會均等，出現正面的 50 元硬幣就當作加碼獎金。已知奶奶有 6 個孫子，試問她今年發出金額的期望值為\_\_\_\_\_元。

Ans : 13050

點數和為 2、12 的機率均為  $\frac{1}{36}$ ；點數和為 3、11 的機率均為  $\frac{2}{36}$ ；點數和為 4、10 的機率均為  $\frac{3}{36}$ ；

點數和為 5、9 的機率均為  $\frac{4}{36}$ ；點數和為 6、8 的機率均為  $\frac{5}{36}$ ；點數和為 7 的機率為  $\frac{6}{36}$

$2 \leq s \leq 12$ ，點數和為  $s$ ，投擲  $s$  個 50 元硬幣，則出現正面的 50 元硬幣個數有  $s \cdot \frac{1}{2} = \frac{s}{2}$  個

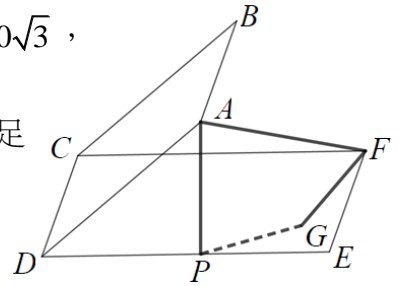
$$50 \left( \frac{1}{36} \cdot \frac{2+12}{2} + \frac{2}{36} \cdot \frac{3+11}{2} + \frac{3}{36} \cdot \frac{4+10}{2} + \frac{4}{36} \cdot \frac{5+9}{2} + \frac{5}{36} \cdot \frac{6+8}{2} + \frac{6}{36} \cdot \frac{7}{2} \right) = \frac{50 \cdot 7 \cdot (1+2+3+4+5+3)}{36} = 175$$

每位孫子的期望獎金為  $2000+175=2175$ ，發出金額的期望值為  $2175 \times 6 = 13050$

6. 如右圖，空間中，設矩形  $ABCD$  與矩形  $CDEF$  的二面角為  $60^\circ$ ， $\overline{AD} = 10\sqrt{3}$ ，

$\overline{AF} = 25$ ， $P$  為  $\overline{DE}$  上一點，滿足  $\overline{AP} \perp \overline{DE}$ ， $G$  為平面  $CDEF$  上一點滿足

$\overline{AF} \perp \overline{FG}$ ，且  $\overline{PG} = 20\sqrt{2}$ ，則  $\overline{FG} =$  \_\_\_\_\_。



Ans : 20

設  $A$  對平面  $CDEF$  的正射影為  $Q$ ， $Q$  對  $\overline{CD}$  的正射影為  $R$ ，則  $\overline{AQ} \perp$  平面  $CDEF$  且  $\overline{QR} \perp \overline{CD}$

由三垂線定理得  $\overline{AR} \perp \overline{CD}$ ，則  $R = D$  且  $Q = P$ ， $A$  對平面  $CDEF$  的正射影即為  $P$ ，且  $\overline{AP} \perp \overline{GP}$ ，

$\angle ADP = 60^\circ$ ， $\overline{AP} \perp \overline{DE}$

$\triangle ADP$  中， $\overline{AP} = \overline{AD} \sin 60^\circ = 15$ ，則

$$\overline{FG} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{(\overline{AP}^2 + \overline{PG}^2) - \overline{AF}^2} = \sqrt{15^2 + (20\sqrt{2})^2 - 25^2} = \sqrt{(20\sqrt{2})^2 - 20^2} = 20$$

9. 設  $a, b$  皆為實數，已知  $f(x) = \int_0^x (at^3 + bt^2 - 9) dt$  在  $x = 3$  有最小值且  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 32$ ，則  $2a - b =$

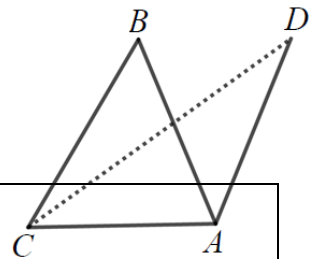
\_\_\_\_\_。 Ans : 49

$$f'(x) = ax^3 + bx^2 - 9 \rightarrow f'(3) = 0 \rightarrow 3a + b = 1, \quad f(x) = \int_0^x (at^3 + bt^2 - 9) dt = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 - 9x$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 \left( \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 - 9x \right) dx = 2 \int_0^2 \left( \frac{a}{4}x^4 \right) dx = \frac{a}{2} \cdot \frac{32}{5} = 32 \Rightarrow a = 10, \quad b = -29, \quad \text{則 } 2a - b = 49$$

11. 如右圖， $\triangle ABC$  為銳角三角形，且  $\triangle ABC$  的面積為  $4\sqrt{3}$ ，以  $A$  點為中心將  $B$  點順時針旋轉  $45^\circ$  至  $D$  點，試求  $\overline{CD}$  的最小值為 \_\_\_\_\_。

Ans :  $4\sqrt{6}$



設  $\overline{AB} = x$ 、 $\overline{AC} = y$ ， $\angle BAC = \theta$ ， $a\triangle ABC = \frac{xy}{2} \sin \theta = 4\sqrt{3} \rightarrow xy \sin \theta = 8\sqrt{3}$

$$\overline{CD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\theta + 45^\circ) = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy(\cos \theta - \sin \theta) \geq 2xy - \sqrt{2}xy \cos \theta + 8\sqrt{6}$$

$$2xy - \sqrt{2}xy \cos \theta + 8\sqrt{6} = \frac{8\sqrt{3}(2 - \sqrt{2} \cos \theta)}{\sin \theta} + 8\sqrt{6} = 8\sqrt{6} \left( \frac{\sqrt{2} - \cos \theta}{\sin \theta} + 1 \right), \quad \text{設 } k = \frac{\sqrt{2} - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$\cos \theta + k \sin \theta = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{k^2 + 1} \geq \sqrt{2} \rightarrow k \geq 1$ ，則  $\overline{CD} \geq \sqrt{16\sqrt{6}} = 4\sqrt{6}$ ，等號成立於：

$$\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 45^\circ \text{ 且 } x = y = 2\sqrt{24}$$

12. 設  $\{x\}$  表實數  $x$  的小數部分，例如： $\{2\} = 0$ ， $\{1.3\} = 0.3$ ， $\{-0.1\} = 0.9$ ，若方程式  $\{x\} - kx + 3k = 0$  恰有三個相異的實數解  $x$ ，則實數  $k$  的取值最佳範圍為\_\_\_\_\_。

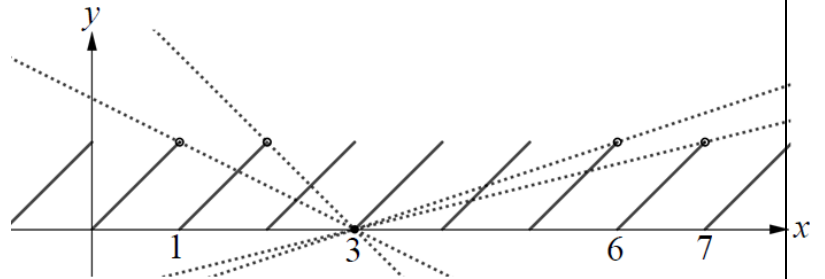
Ans :  $\frac{1}{4} < k < \frac{1}{3}$  或  $-1 < k < -\frac{1}{2}$

設  $[x]$  表不大於  $x$  的最大整數，則  $\{x\} = x - [x]$

$\begin{cases} y = x - [x] \\ y = k(x-3) \end{cases}$  的圖形有三個相異的實根

則  $\frac{1-0}{7-3} < k < \frac{1-0}{6-3}$  或  $\frac{1-0}{2-3} < k < \frac{1-0}{1-3}$

則  $\frac{1}{4} < k < \frac{1}{3}$  或  $-1 < k < -\frac{1}{2}$



13. 如右圖，四邊形  $ABDC$  的兩對角線  $\overline{BC}$  與  $\overline{AD}$  相交於  $E$  點，

已知  $\overline{CD} = m\overline{AB} + 7\overline{AC}$ ，其中  $m > 0$ ，若  $\triangle ACE$  的面積為 1，

則  $\triangle ABE$  與  $\triangle CDE$  之面積和的最小值為\_\_\_\_\_。

Ans :  $7 + 4\sqrt{2}$

$\overline{AD} - \overline{AC} = m\overline{AB} + 7\overline{AC} \rightarrow \overline{AD} = m\overline{AB} + 8\overline{AC}$ ，則  $\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{m}{8}$ ，令  $\overline{AD} = t\overline{AE}$ ，則  $\overline{AE} = \frac{m}{t}\overline{AB} + \frac{8}{t}\overline{AC}$

由共線定理得  $\frac{m}{t} + \frac{8}{t} = 1$ ， $t = m + 8$ ， $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = m + 7$ ， $\frac{a\triangle ABE}{a\triangle ACE} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{8}{m} \rightarrow a\triangle ABE = \frac{8}{m}$ ，

$\frac{a\triangle CDE}{a\triangle ACE} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = m + 7 \rightarrow a\triangle CDE = m + 7$

則  $a\triangle ABE + a\triangle CDE = \frac{8}{m} + m + 7 = \left(\frac{8}{m} + m\right) + 7 \geq 2\sqrt{\frac{8}{m} \cdot m} + 7 = 4\sqrt{2} + 7$ ，等號成立於  $\frac{8}{m} = m$ ， $m = 2\sqrt{2}$

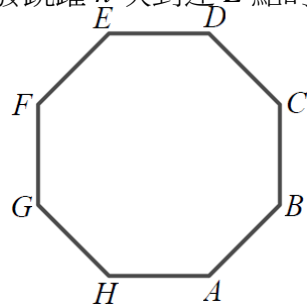
15. 一隻青蛙在如右圖正八邊形的池塘頂點間移動，除了頂點  $E$  之外，青蛙每次可由其餘 7 個頂點之一跳到兩相鄰頂點中的任一點(例如：從  $B$  點跳到  $A$  或  $C$  點；從  $C$  點跳到  $B$  或  $D$  點)，且當青蛙跳到頂點  $E$  時，則停止移動。試求青蛙從頂點  $A$  出發，跳躍 16 次到達  $E$  點的跳法有\_\_\_\_\_種。



Ans : 3824

設  $a_n, b_n, b_n, c_n, c_n, d_n, d_n$  為分別從  $A, B, H, C, G, D, F$  點出發跳躍  $n$  次到達  $E$  點的

方法數，則 
$$\begin{cases} a_n = 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}, n > 1 \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{2} = a_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = \frac{a_{n+2}}{2} - a_n \\ a_n = 2(c_n - c_{n-2}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_n = \frac{a_{n+2}}{2} - a_n \\ a_n = 2(c_n - c_{n-2}) \end{cases}$$



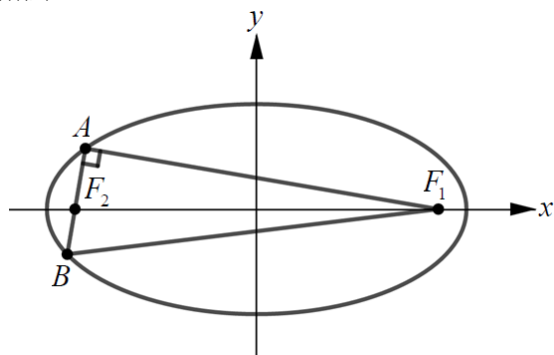
$$a_n = 2 \left[ \left( \frac{a_{n+2}}{2} - a_n \right) - \left( \frac{a_n}{2} - a_{n-2} \right) \right] \rightarrow a_n = a_{n+2} - 3a_n + 2a_{n-2}, \text{ 則 } a_{n+2} = 4a_n - 2a_{n-2}$$

即  $a_{n+4} = 4a_{n+2} - 2a_n, n \geq 1, a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 2, a_5 = 0, a_6 = 8, a_7 = 0, a_8 = 28, a_9 = 0, a_{10} = 96, a_{11} = 0, a_{12} = 328, a_{13} = 0, a_{14} = 1120, a_{15} = 0, a_{16} = 3824$

18. 如右圖，橢圓  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$  中， $F_1$  與  $F_2$  分別為右焦點與左焦點，

$\overline{AB}$  為過  $F_2$  的一焦弦滿足  $\angle BAF_1 = 90^\circ$ ，且  $\overline{AF_2} < \overline{AF_1}$ ，

則  $\triangle ABF_1$  的內切圓半徑為\_\_\_\_\_。



Ans :  $\frac{24 + 4\sqrt{2}}{17}$

$$\overline{F_1F_2} = 8\sqrt{3}, \text{ 設 } \overline{AF_2} = x, \text{ 則 } \overline{AF_1} = 16 - x, \triangle AF_1F_2 \text{ 中, } x^2 + (16 - x)^2 = (8\sqrt{3})^2 \rightarrow x^2 - 16x + 32 = 0$$

則  $x = 8 - 4\sqrt{2}$ ，根據橢圓性質： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \rightarrow \frac{1}{\overline{AF_2}} + \frac{1}{\overline{BF_2}} = \frac{2a}{b^2}$ ，得  $\frac{1}{8 - 4\sqrt{2}} + \frac{1}{\overline{BF_2}} = 1$ ，則

$$\frac{1}{\overline{BF_2}} = \frac{4(6 + \sqrt{2})}{17}$$

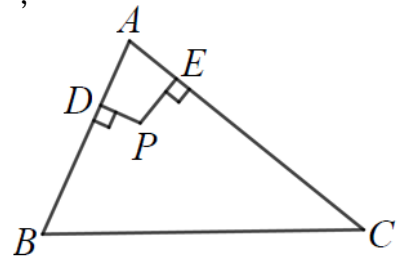
$$\text{觀察 } \overline{AB} + \overline{AF_1} - \overline{BF_1} = (\overline{AF_2} + \overline{AF_1}) + (\overline{BF_2} - \overline{BF_1}) = 16 + \overline{BF_2} - (16 - \overline{BF_2}) = \overline{BF_2}$$

$$\text{則 } \triangle ABF_1 \text{ 的內切圓半徑} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AF_1} - \overline{BF_1}) = \overline{BF_2} = \frac{4(6 + \sqrt{2})}{17} = \frac{24 + 4\sqrt{2}}{17}$$

20. 如右圖， $P$  為  $\triangle ABC$  內部一點， $\tan A = \sqrt{15}$ ， $P$  對  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  的垂足  $D$ 、 $E$

分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上，且滿足  $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{1}{4}$ ，若  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，

則  $3x + 5y$  的最大值為\_\_\_\_\_。



Ans :  $\frac{8}{5}$

$\cos A = \frac{1}{4}$ ， $\triangle ABC$  中，由餘弦定理得  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \angle BAC$ ，則  $a^2 = c^2 + b^2 - \frac{bc}{2}$

$$\frac{c^2}{3} = \overline{AD} \times \overline{AB} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = xc^2 + y\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right) = xc^2 + \frac{ybc}{4} ;$$

$$\frac{b^2}{5} = \overline{AE} \times \overline{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = x\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right) + yb^2 = \frac{xbc}{4} + yb^2$$

$$\begin{cases} 12c^2x + 3bcy = 4c^2 \\ 5bcx + 20b^2y = 4b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12cx + 3by = 4c \\ 5cx + 20by = 4b \end{cases} \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 4c & 3b \\ 4b & 20b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12c & 3b \\ 5c & 20b \end{vmatrix}} = \frac{80c - 12b}{225c}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 12c & 4c \\ 5c & 4b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12c & 3b \\ 5c & 20b \end{vmatrix}} = \frac{48b - 20c}{225b}$$

$$\text{則 } 3x + 5y = 3\left(\frac{80c - 12b}{225c}\right) + 5\left(\frac{48b - 20c}{225b}\right) = \frac{480}{225} - \frac{1}{225}\left(\frac{36b}{c} + \frac{100c}{b}\right) \leq \frac{480}{225} - \frac{1}{225} \cdot 2\sqrt{\frac{36b}{c} \cdot \frac{100c}{b}} = \frac{8}{5}$$

等號成立於： $\frac{36b}{c} = \frac{100c}{b}$ ，則  $\frac{c}{b} = \frac{3}{5}$ ， $x = \frac{4}{15}$ ， $y = \frac{4}{25}$