

一、填充題 (共 10 題, 每題 6 分, 共 60 分)

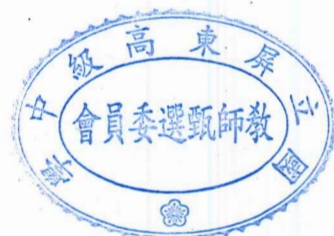
1. 設 x 為實數且滿足 $f(x+7) \leq f(x)+7$, $f(x+3) \geq f(x)+3$, 若 $f(235) = 220$, 求 $f(1012) =$ _____。
2. 設 a, b 為方程式 $x^2 + 3x + 9 = 0$ 的二根, 求 $\frac{a}{b} + (\frac{a}{b})^2 + \dots + (\frac{a}{b})^{2022}$ 之值為 _____。
3. 設 $a > b > c > d > e > 0$, 若 $\log_{\frac{a}{b}} 20 + \log_{\frac{b}{c}} 20 + \log_{\frac{c}{d}} 20 + \log_{\frac{d}{e}} 20 \geq k \log_{\frac{a}{e}} 20$ 恆成立, 求 k 之值為 _____。
4. 已知橢圓 $9x^2 + (y-a)^2 = 9$ 與拋物線 $y = 2x^2$ 有交點, 求 a 之值的範圍為 _____。
5. 四邊形 $ABCD$ 中, 兩對角線長分別為 $AC = 7$, $BD = 5$, 則 $(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot (\overline{AD} + \overline{BC}) =$ _____。
6. 設擲筊時出現聖杯的機率為 0.5, 求第 5 個聖杯出現在第 10 次擲筊之後的機率為 _____。
7. 在坐標平面上, 令點 O 為原點、點 A 為 $(0, 3)$ 。已知直線 L_1 通過點 A , 且和直線 $L_2: 5x - 12y = 0$ 以及 x 軸正向分別交於點 B 、點 C 。若三角形 $\triangle OBC$ 周長為 30, 試求三角形 $\triangle OAC$ 的面積 _____。
8. 高斯符號定義如下: $[x] =$ 不大於 x 的最大整數。

試求解方程式 $\left[\frac{23x-7}{4} \right] = \frac{13x+5}{3}$, $x =$ _____。(答案不唯一, 全對才給分)

9. 試求整數 $\sum_{0 \leq i < j \leq 111} (C_i^{111} \cdot C_j^{111})$ 除以 29 的餘數 = _____。
10. 艾莉絲跟巴柏賭錢, 規則如下: 兩人輪流丟擲同一個不公正的硬幣 (該硬幣出現正面的機率為 $\frac{2}{5}$ 、反面的機率為 $\frac{3}{5}$)。如果出現正面, 則艾莉絲要給巴柏 1 元; 反之, 如果出現反面, 則巴柏要給艾莉絲 1 元。如果遊戲開始的起始籌碼是: 艾莉絲有 4 元、巴柏有 3 元。試求艾莉絲將巴柏的錢全部贏光的機率 = _____。

二、計算證明題 (共 5 題, 每題 8 分, 共 40 分)

11. 設正整數 $a_i \neq 110$, $i = 1, 2, \dots, 2500$, 若其中任意一些連續項的和均不等於 110, 求 $\sum_{i=1}^{2500} a_i$ 的最小值?
12. 所有正整數從小排列到大, 求與 105 互質的第 1204 項的數為何?
13. 已知 n, m 皆為正整數, 試求定積分 $\int_0^{\pi} (\pi - x)^m x^n dx =$ _____
(答案可以 n, m 及高中階段常見之標準數學記號表示)



14. 若線性方程組 $L: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 在坐標空間中代表三個平面，兩兩相交於一線，且三交線兩兩互

相平行，試證明： $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 、 $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 、 $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ 不全為 0。

15. 已知 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 皆為正實數，其中 $n \geq 2$ ，試證明：

$$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n + \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n \geq \left(\frac{x_0}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) + \left(\frac{x_n}{x_0}\right)$$

