國立屏東高級中學111學年度正式教師甄試數學科筆試試題卷 第1頁/共兩頁

一、填充題（共10題，每題6分，共60分）

1. 設 x 為實數且滿足$f(x+7) \leq f(x)+7$，$f(x+3) \geq f(x)+3$，若$f(235)=220$，求$f(1012)$=______。

2. 設 a,b 為方程式$x^2+3x+9=0$的二根，求$\frac{a}{b}+(\frac{a}{b})^2+\cdots+(\frac{a}{b})^{2022}$之值為______。

3. 設$a>b>c>d>e>0$，若$log_{\frac{a}{b}}20+log_{\frac{b}{c}}20+log_{\frac{c}{d}}20+log_{\frac{d}{e}}20 \geq klog_{\frac{a}{e}}20$恆成立，求 k 之值為

   ______。

4. 已知橢圓$9x^2+(y-a)^2=9$與拋物線$y=2x^2$有交點，求 a 之值的範圍為______。

5. 四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線長分別為$AC=7$，$BD=5$，則$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ =______。

6. 設擲筊時出現聖杯的機率為0.5，求第5個聖杯出現在第10次擲筊之後的機率為______。

7. 在坐標平面上，令點 O 為原點、點 A 為$(0,3)$。已知直線L_1通過點 A，且和直線$L_2:5x-12y=0$以及 x 軸正向分別交於點 B、點 C。若三角形ΔOBC周長為30，試求三角形ΔOAC的面積______。

8. 高斯符號定義如下：$[x]$=不大於 x 的最大整數。

   試求解方程式$\left[\dfrac{23x-7}{4}\right]=\dfrac{13x+5}{3}$，$x=$__________。(答案不唯一，全對才給分)

9. 試求整數 $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq 111}(C_i^{111}\cdot C_j^{111})$ 除以29的餘數=______。

10. 艾莉絲跟巴柏賭錢，規則如下：兩人輪流丟擲同一個不公正的硬幣（該硬幣出現正面的機率為$\dfrac{2}{5}$、反面的機率為$\dfrac{3}{5}$）。如果出現正面，則艾莉絲要給巴柏1元；反之，如果出現反面，則巴柏要給艾莉絲1元。

    如果遊戲開始的起始籌碼是：艾莉絲有4元、巴柏有3元。試求艾莉絲將巴柏的錢全部贏光的機率

    =__________。

二、計算證明題（共5題，每題8分，共40分）

11. 設正整數$a_i \neq 110$，$i=1,2,\ldots,2500$，若其中任意一些連續項的和均不等於110，求$\sum_{i=1}^{2500}a_i$的最小值?

12. 所有正整數從小排列到大，求與105互質的第1204項的數為何?

13. 已知n,m皆為正整數，試求定積分$\int_0^{\pi}(\pi-x)^m x^n dx=$__________

    (答案可以n,m及高中階段常見之標準數學記號表示)

14. 若線性方程組$L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$在坐標空間中代表三個平面，兩兩相交於一線，且三交線兩兩互相平行，試證明：$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$、$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$、$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$不全為0。

15. 已知$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$皆為正實數，其中$n\geq 2$，試證明：

$$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n\geq\left(\frac{x_0}{x_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)$$