

111 學年度臺中市政府教育局受託辦理本市立國民中學
(含本市立高級中等學校附設國中部)教師甄選

數學科題本

※請先確認你的答案卡、准考證與座位號碼是否一致無誤。

請閱讀以下測驗作答說明

測驗說明：

這是 111 學年度臺中市政府教育局受託辦理本市立國民中學(含本市立高級中等學校附設國中部)教師甄選數學科題本，題本採雙面印刷，共 50 題，每題只有一個正確或最佳的答案。測驗時間共 70 分鐘，作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

注意事項：

1. 所有試題均為四選一的選擇題，答錯不倒扣。
2. 依試場規則規定，答案卡上不得書寫姓名及任何標記。故意污損答案卡、損壞試題本，或在答案卡上顯示自己身份者，該科測驗不予計分。

作答方式：

請依照題意從四個選項中選出一個正確或最佳的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡上相應的位置劃記，請務必將選項塗黑、塗滿。如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，重新塗黑答案。

試題公告
僅供參考

選擇題 (共 50 題, 每題 2 分, 共 100 分)

1. 設 $f(x) = x \sin(x) + e^{-x}$, 則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - 2f(0) + f(-2h)}{h^2}$ 之值為何?

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 12

2. 求曲線 $x^2 + 3xy + y^2 + x - y = 10$ 在點 $(1, 2)$ 上的切線方程式為何?

- (A) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
- (B) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$
- (C) $y = -x + 3$
- (D) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

3. 設 $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_1^{\cos x} \sqrt{1+t^4} dt \right)$, 則 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 之值為何?

- (A) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (C) $-\frac{\sqrt{10}}{4}$
- (D) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

4. 設區間 $[a, b)$ 為冪級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k 2^k}$ 之收斂域, 則 $a + 4b$ 的值為何?

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2

5. 設空間中一點 $(2, 1, 3)$ 關於平面 $x - 3y + 2z = 4$ 的對稱點座標為 (α, β, γ) ，則 $\beta + \gamma$ 的值為何？

(A) 4

(B) $\frac{29}{7}$

(C) $\frac{30}{7}$

(D) $\frac{31}{7}$

6. 設矩陣 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，若 $A^{111} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，則 $a + c + d = ?$

(A) 110

(B) 111

(C) 112

(D) 113

7. 用 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 這七個數，可以組成多少個不重複的 5 位偶數，但 3 不在百位上？

(A) 1200

(B) 1260

(C) 1280

(D) 1440

8. 已知 $\log_3 = 0.4771$ 。設 n 為最小的自然數滿足 $10^{n-2} > 9^n$ ，則 $n = ?$

(A) 42

(B) 43

(C) 44

(D) 45

9. 設 $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ ，則 $x^3 + 3x + 1$ 之值為何？

(A) $2\sqrt{3} + 1$

(B) $\sqrt{3} + 3$

(C) $6 - \sqrt{3}$

(D) $7 - 2\sqrt{3}$

10. 設 $x = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ ，則 $64x^{10}$ 之值為何？

(A) $-\sqrt{3}-i$

(B) $1-\sqrt{3}i$

(C) $\sqrt{3}-i$

(D) $-1+\sqrt{3}i$

11. 下列何者不是13的倍數？

(A) $66^{111} - 1$

(B) $2^{999} + 5$

(C) $68^{33} + 1$

(D) $18^{50} + 1$

12. $(1+x+x^2+x^3+x^4)(x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^2$ 的展開式中， x^{10} 的係數為何？

(A) 25

(B) 30

(C) 35

(D) 40

13. 設 $\log x + 2 \log y = 1$ ，試求 $3x + 2y^2$ 的最小值為何？

(A) $3\sqrt{15}$

(B) $5\sqrt{10}$

(C) $4\sqrt{15}$

(D) $9\sqrt{3}$

14. 已知 $3-\sqrt{5}$ 是方程式 $x^2 - 9x \cos \theta + 4 = 0$ 的一個根，且 θ 為銳角，則 $\sin \frac{\theta}{2} = ?$

(A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(B) $\frac{\sqrt{7}}{6}$

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{6}$

(D) $\frac{1}{2}$

15. 用下列四個多項式 $1 + 2x - x^2 + x^3$, $3 + x + x^2 + 2x^3$, $-1 + x - 2x^2 + 2x^3$, $-2x + x^2 + 2x^3$, 展開出 $P_4(x)$ 的一個子空間, 請問此子空間的維度是多少?
- (A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

16. 若方程組
$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 10 \\ 4x - y - 3z = 2m \\ nx - 4y - 2z = m - 2 \end{cases}$$
 有無窮多解, 求 $m - n = ?$
- (A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7

17. 設 α 為 $|z - 1| \left| z + \frac{1}{2} \right|$ 在圓盤 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 之最大值, 則 $\alpha^2 = ?$

- (A) $\frac{5}{4}$
(B) $\frac{81}{32}$
(C) $\frac{41}{16}$
(D) $\frac{21}{16}$

試題公告
僅供參考

18. 求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$ 。

- (A) $-1/2$
(B) $1/2$
(C) 0
(D) 3

19. 假設 $f(x) = \cos(\sin(x))$, 則 $f'(0)$ 為

- (A) -1
(B) 0
(C) $\pi/2$
(D) ∞

20. 假設 L 表示曲線 $y = x^2$ 在 $(1,1)$ 處之切線，則 L 與 x 軸之交點 x 座標為

- (A) 不存在
- (B) -1
- (C) $1/3$
- (D) $1/2$

21. 假設 $f(x) = x^2 + y^2$ ，則 $\nabla f(1,1)$ 為

- (A) 不存在
- (B) 4
- (C) $\langle 2, 2 \rangle$
- (D) $2x + 2y$

22. 積分 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx$ 為

- (A) $\pi/3 + 2$
- (B) 0
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $\sqrt{\sqrt{5} - 2}$

23. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4$ 為

- (A) $1/2$
- (B) $1/3$
- (C) $1/4$
- (D) $1/5$

24. 極限值 $\lim_{s \rightarrow \pi} \frac{1}{s - \pi} \int_{\pi}^s \cos^3 x dx$ 為

- (A) $-1/4$
- (B) $1/4$
- (C) 0
- (D) -1

試題公告
僅供參考

25. 假設 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$ 且 $x_k = 1 + \frac{1}{k^2}$ ，則 $f(x_k)$ 極限為何？

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 1

26. 級數 $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$ 之和為

- (A) 1/2
- (B) 3/4
- (C) 1/3
- (D) 2

27. 假設 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$ ，則 A 可能為

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. 在函數 $f(x) = \sin x$ 的馬克勞倫級數(Maclaurin series)中 x^{18} 的係數為何？

- (A) 1/2
- (B) 0
- (C) 1/(18!)
- (D) -1/(18!)

試題公告
僅供參考

29. 冪級數 $y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ 為以下哪個方程式的解。

(A) $y'' = y^2$

(B) $y' = y$

(C) $y' = -y$

(D) $(y')^2 = 2y$

30. 假設 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{k!}$ ，則 $f^{(3)}(0)$ 為

(A) 0

(B) 1

(C) 3

(D) $1/3$

31. 假設 A 為 2×3 實數矩陣且 C 為 5×8 實數矩陣，現在假設 ABC 三矩陣之乘法有意義，則矩陣 B 之大小為

(A) 2×3

(B) 3×4

(C) 3×5

(D) 8×2

32. 以下哪一個方陣不可逆？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

33. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 A 之零空間(null space)為 \mathbb{R}^3 之

- (A) 一點
- (B) 一條線
- (C) 一平面
- (D) 整個 \mathbb{R}^3

34. 假設 $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， Ax 表示以下何種運作？

- (A) 向量 x 順時針旋轉 45°
- (B) 向量 x 逆時針旋轉 45°
- (C) 向量 x 對於某一直線的鏡射
- (D) 以上皆非

35. 假設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 A 的零化度(nullity)為

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 以上皆非

36. 假設 V 表示所有的 2×3 實數矩陣所構成之向量空間，則 V 的維度為

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 5
- (D) 6

37. $\int_0^\pi x^2 \cos x dx = ?$

- (A) -1
- (B) 1
- (C) 2π
- (D) -2π

38. 已知 $E(X+1) = 3$ 且 $E[(X+1)^2] = 20$ ，求 $\text{Var}(2X-1) = ?$

- (A) 17
- (B) 32
- (C) 44
- (D) 58

39. $\int_0^\pi [f''(x) + f(x)] \sin x dx = 0$ 且 $f(0) = -\frac{1}{2}$ ，求 $f(\pi) = ?$

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) 1
- (D) $\frac{3}{2}$

40. 連續同時投擲兩枚公正的六面骰子，設隨機變數 X 為第一次出現點數和為 5 所需投擲的次數，求 $E(5X-1)$ 之值

- (A) 29
- (B) 34
- (C) 34
- (D) 44

41. 設函數 $f(x) = \cos^2 2x + 4 \cos^2 x - 4$ ，求 $f(x)$ 的最小值為

- (A) -5
- (B) -3
- (C) 1
- (D) 2

42. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} \int_0^{2x} \frac{t^2}{1+t^3} dt$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) $\frac{4}{3}$
- (D) $\frac{8}{3}$

43. 設 $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 之值

- (A) $2 \cos 3\theta$
- (B) $2 \sin 3\theta$
- (C) $\cos 3\theta \pm i \sin 3\theta$
- (D) $2[\cos 3\theta \pm i \sin 3\theta]$

44. 設 $a > 0$ ， $b > 0$ 且 $a + b = 4$ ，求 $3 \log a + \log b$ 之最大值為

- (A) $2 \log 2$
- (B) $3 \log 2$
- (C) $2 \log 3$
- (D) $3 \log 3$

45. 求 $\frac{3^8 + 3^6 + 3^4 + 3^2 + 1}{3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1} = ?$

- (A) 58
- (B) 61
- (C) 68
- (D) 72

46. 設實數 k 使得方程式 $x^2 + kx + 1 = 0$ 與 $x^2 + x + k = 0$ 至少有一公共根，則所有可能的 k 值其和為

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2

47. 若 a, b 為整數且滿足 $|ab| + |a + b| = 5$ ，則 (a, b) 的所有可能解共有幾組？

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 12

試題公告
僅供參考

48. 設 $a_i, i = 1, 2, \dots, 50$ 為正整數，已知 $\sum_{i=1}^{50} a_i = 1504$ 且 $d | a_i, i = 1, 2, \dots, 50$ ，求 d 的最大值為

- (A) 4
- (B) 8
- (C) 16
- (D) 32

49. 在座標平面上滿足 $y^2 - 4x^2 \leq 0$ 與 $|x| \leq 2$ 的區域其面積為

- (A) 8
- (B) 16
- (C) 24
- (D) 32

50. 設 $0 < X < 1, 0 < Y < 1$ ，求 $X + Y \leq a (1 < a < 2)$ 的機率，即求 $P(X + Y \leq a) = ?$

(A) $\frac{a^2}{2} - 2a + 1$

(B) $\frac{a^2}{2} - a + 1$

(C) $-\frac{a^2}{2} + 2a - 1$

(D) $-\frac{a^2}{2} + a + 1$

試題公告
僅供參考