

桃園市立高級中等學校 111 學年度教師聯合甄選筆試試題參考答案

科目：數學科

說明：本試卷共分選擇題、填充題，以及計算、證明或教案設計題三部份。

第壹部份：選擇題占 8%；第貳部份：填充題占 42%；第參部份：計算、證明或教案設計題占 50%。請使用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫填答於「答案本」上，依題號作答，修正時應使用修正液（帶）；答案本因考生書寫不清、污損等人為因素導致無法批改，由考生自行負責不得有異議；於試題卷上作答者，不予計分。

本試題卷連同答案本一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第壹部份：選擇題（共 2 題，每題 4 分，共 8 分）

(一) 單一選擇題：請選出一個最適當的選項填答於答案本上。答錯、整題未答不予倒扣。

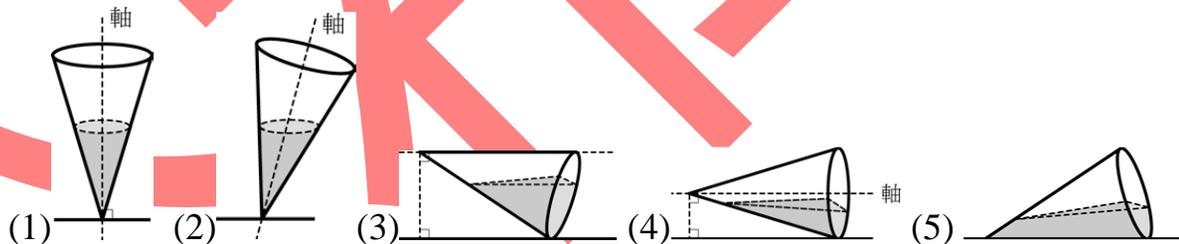
1. 已知某連續函數 $f(x, y)$ 之定義域為整個坐標平面，若想要證明「對所有 $x \in \mathbb{R}$ 皆存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x, y) = 0$ 」不成立，可轉化為證明以下哪一項命題？
- (A) 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 及所有 $y \in \mathbb{R}$ 皆滿足 $f(x, y) \neq 0$
 - (B) 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 皆存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x, y) \neq 0$
 - (C) 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 皆不存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x, y) = 0$
 - (D) 對某 $x \in \mathbb{R}$ 不存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x, y) = 0$
 - (E) 對某 $x \in \mathbb{R}$ 存在 $y \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x, y) \neq 0$

ANS : D

(二) 多重選擇題：共有 5 個選項，其中至少有一個是正確的，請填答於答案本上。全對始給分；答錯、整題未答不予倒扣。

2. 以下哪些試題不符合 108 課綱 11 年級 B 類數學課程的「圓錐曲線」學習目標？

- (A) 一密閉圓錐形容器內裝有少於一半的水，今將容器依不同角度放置於平面上，則水面與容器截痕的曲線中，下列選項何者為拋物線？



- (B) 設 k 為一常數。已知一拋物線通過點 $(2, 0)$ ，且焦點為 $(1, 2)$ ，準線為 $kx + y + 1 = 0$ ，求此拋物線頂點的坐標。

- (C) 空間中一直圓錐面以 L 為軸，頂點為 V 。若平面 E 與直圓錐面的截痕為一橢圓。令橢圓的中心為 O ，橢圓長軸上的兩端點為 A 、 B ， $\triangle AVB$ 的內切圓圓心為 I ，且內切圓與 \overline{AB} 之切點為 D ，若 $\overline{VA} = 3$ 、 $\overline{VB} = 5$ 、 $\overline{AB} = 7$ ，則 $\triangle AVB$ 的內切圓半徑為何？ \overline{AD} 的長度為何？

- (D) 已知圖(一)聖誕樹為一個圓錐形，若將一個聖誕燈飾在聖誕樹上環繞一圈，如圖 2，使其到聖誕樹頂端的最近距離為 3，最遠距離為 4，又此圓錐的母線與軸夾角為 30° 。試求此時聖誕燈飾所形成的橢圓形的長軸長。



(圖一)



(圖二)

- (E) 生活中常見的手搖飲的免洗杯形狀近似於直圓錐臺，其前視圖是等腰梯形。有一間真好喝飲料店所採用的免洗杯上底為 9 公分，下底為 6 公分，腰長為 18 公分的直圓錐。答案卷

- (1) 直圓錐臺之前視圖（等腰梯形）的高為何？
- (2) 此免洗杯的容量為何？

ANS : BC

第貳部份：填充題（共 7 題，占 42 分）

說明：作答時請將答案依照順序寫在答案本上。每題 6 分，全對才得分。

1. 在坐標平面上給定三點 $A(-3,2)$ 、 $B(5,-4)$ 、 $C(4,1)$ ，想要添加一點 D 使得 A 、 B 、 C 、 D 成為一平行四邊形的頂點。試寫出所有可能 D 點的坐標。
ANS： $(-2,-3)$ 、 $(12,-5)$ 、 $(-4,7)$

2. 定義集合 A 、 B 、 C 如下：
 $A = \{2x+6y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$
 $B = \{3x+7y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$
 $C = \{4x+8y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$
試寫出 A 、 B 、 C 互相的包含關係。
ANS： $C \subset A \subset B$

3. 「你的我的回不去的」這八個字任意排列且「回」在「不」的左邊，「不」在「去」的左邊，一共有多少種情形？
ANS：1120

4. 假設 x 是介於 0 到 1 的實數，請問 $x^2(1-x)$ 的最大值是多少？
ANS： $\frac{4}{27}$

5. 有一百個死刑犯人圍成一圈，按照一號到一百號依序排列。警長從一號開始開槍射殺，二號就跳過，接著射殺三號，以此類推，警長宣布最後一個生存者可以被釋放，請問幾號的位子可以安全離開？
ANS：72

6. 如果 $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$ 有三個實根 a, b, c ，請問以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 為根的三次方程式是？（請把首項係數令為 1）
ANS： $x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = 0$

7. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{4} + 5\right)$ 週期為多少？
ANS：24

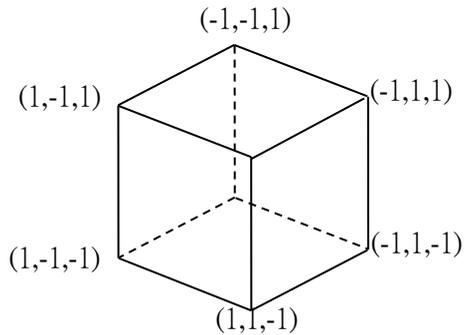
第參部份：計算、證明或教案設計題（共4題，占50分）

說明：作答時請將答案依照順序寫在答案本上。第1題至第3題每題10分，第4題20分。應盡量寫明理由，閱卷時可酌情給部份分數。

1. 在二維平面上單位圓上有若干個點，這些點兩兩之間的距離只有兩種不同數值，請問這個點集合的最大個數是多少？

ANS：略

2. 假設有個正立方體的八個頂點如下圖，請驗證這八個點的四條大對角線會形成等角直線組，意即任意取兩條線都會構成一樣的角。請問這固定角度的cos值的絕對值是多少？



ANS：略

3. 令 Γ_n 為直角坐標平面上方程式 $|x|^n + |y|^n = 2^n$ 的圖形。

(1) 試描繪 Γ_1 及 Γ_2 。(2分)

(2) 設 $x+y=a_n$ 是 Γ_n 的切線，它們相切於第一象限。試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。(4分)

(3) 令 $|\Gamma_n|$ 表示 Γ_n 所圍平面區域（原點在其內部）的面積。試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Gamma_n|$ ，應說明理由。(4分)

ANS：略

4. 假設以下先備知識：

(1) 坐標平面上點 $P(a,b)$ 對稱於 x 軸、 y 軸、 $y=x$ 直線的對稱點坐標公式。

(2) 直角三角形內其中一銳角 θ 之三角比 $\sin\theta \cdot \cos\theta$ 的定義；它們的平方關係。

(3) 108課綱10年級「直線與圓」的學習內容。

設計一份一節課（50分鐘）的教案，假設它是學習任意角 θ 之三角比 $\sin\theta \cdot \cos\theta$ 的第一堂課，並預期達到以下學習目標：

(a) 對周角以內任意度數的角，亦即 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ，知道每個 θ 對應單位圓上的一點。

(b) 認識有向角，且在 $-180^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$ 與 $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 的範圍內認識同界角。

(c) 利用單位圓上的點坐標，將國中階段所知銳角 θ 的 $\sin\theta \cdot \cos\theta$ 推廣到 $-180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 範圍內的角。

(d) 確認銳角 θ 條件下 $\sin\theta \cdot \cos\theta$ 的平方關係可推廣至新範圍內的角。

(e) 能利用對稱性質，推論某些特殊角的 \sin 、 \cos 值。

（20分：整體衡量評分，並不分項計分。）

ANS：略