

# 國立中央大學附屬中壢高級中學 111 學年度第 1 次教師甄選數學科筆試題目卷

作答說明：本試卷共計兩部分，第一部分：填充題每題 7 分，共計 70 分，請將填充題的答案書寫在

答案卷的欄位內；第二部分：計算題每題 10 分，共計 30 分，計算過程需詳列於答案卷上。

## 一、填充題：(每題 7 分，共計 70 分。)

1. 試求級數  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3^6 - 64} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{5^6 - 64} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{7^6 - 64} + \dots + \frac{19 \cdot 21 \cdot 23}{21^6 - 64}$  之和為\_\_\_\_\_。

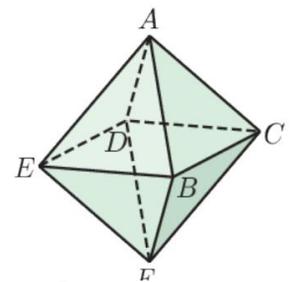
2. 假設四次多項式  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 1$ ，則方程式  $f(f(x)) = 0$  有\_\_\_\_\_個相異實根。

3. 已知直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 18$ ，且過  $A$  點的中線為  $L_1: x + y = 0$ ，而過  $B$  點的中線為  $L_2: x + 3y = 0$ ，試求此  $\triangle ABC$  的面積為\_\_\_\_\_。

4. 設六邊形  $ABCDEF$ ，六個內角皆相等，且  $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{CD} = 6$ 、 $\overline{DE} = 4$ ，求  $\overline{EF} + \overline{FA} =$ \_\_\_\_\_。

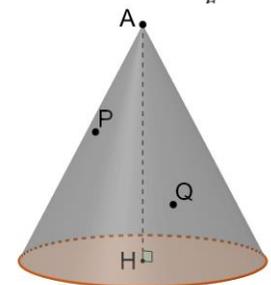
5. 已知  $\triangle ABC$ ，角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的對邊長分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，若  $|b - c| \cos \frac{A}{2} = 8\sqrt{3}$ 、 $(b + c) \sin \frac{A}{2} = 13$ ，則  $a =$ \_\_\_\_\_。

6. 已知右圖中為正八面體，若平面  $ADE$  方程式為  $x + y + z + 4 = 0$ ，平面  $BCF$  方程式為  $x + y + z - 2 = 0$ ，則此正八面體的體積為\_\_\_\_\_。



7. 空間中有一直圓錐(如右圖)，已知其高  $\overline{AH}$  所在的直線方程式為  $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+14}{6}$ ，

以及直圓錐側面上兩點  $P(3, 0, 5)$ 、 $Q(11, -9, -18)$ ，則直圓錐的頂點  $A$  坐標為\_\_\_\_\_。

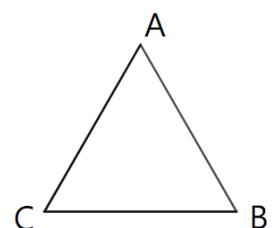


8. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若有兩矩陣  $P$ 、 $Q$  且滿足  $\begin{cases} 5P + 2Q = A \\ P + Q = I_2 \end{cases}$ ，且  $A^4 = aP + bQ$ ，試求  $\log_{10} ab$  為\_\_\_\_\_。

9. 設  $(x, y)$  為圓  $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$  上的動點(但不包含原點)，則所有在複數平面中滿足  $z = \frac{32}{x-yi}$  的

軌跡方程式為\_\_\_\_\_。

10. 如圖， $\triangle ABC$  是邊長為 1 的正三角形，甲、乙、丙分別自  $A$ 、 $B$ 、 $C$  同時出發，沿三角形的邊，順時針方向移動，三人各擲一硬幣，出現正面，則移動 2 個單位，出現反面，則移動 1 個單位，硬幣各擲 5 次，求三人最後在同一位置的機率為\_\_\_\_\_。



二、計算證明題：(每題 10 分，共計 30 分。)

1. 設  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ ，其中  $x > 0$ ，

試求：(1)  $f(x)$  的最小值？(5 分)

(2) 此時的  $x$  是多少？(5 分)

2. 用數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 及字母 A 來組成長度為  $n$  的字串，且規定數字不能相鄰(如  $n=5$ ，可組成 A2AA5 或 6A6A6 或 AAAAA 或.....)，

試問：(1) 當  $n=5$  時，可以組成多少個不同的字串？(5 分)

(2) 長度為  $n$  時可以組成多少個不同的字串？(用  $n$  表示)(5 分)

3. 設  $y = \left| \left| \left| x \right| - 1 \right| - 2 \right| - 3$  的圖形與  $x$  軸所圍出來的封閉區域為  $R$ ，

試求：(1)  $R$  繞  $x$  軸旋轉一圈所得旋轉體體積  $V_x = ?$  (5 分)

(2)  $R$  繞  $y$  軸旋轉一圈所得旋轉體體積  $V_y = ?$  (5 分)

-----試題結束-----