

一、填充題(共 16 題，每題 5 分)

1. Let $f(x) = \frac{25^x}{25^x + 5}$. Calculate $f\left(\frac{1}{221}\right) + f\left(\frac{2}{221}\right) + \dots + f\left(\frac{220}{221}\right) + f\left(\frac{221}{221}\right) =$ _____

2. Suppose that a and b are the integer part and positive fractional part of $\sqrt{12 + 3\sqrt{12}}$, respectively. Then $\frac{2a-3}{a-b-1} + \frac{5}{a+b+1} =$ _____

3. Evaluate $\int \log_{10} x dx =$ _____

4. Find the remainder $r =$ _____ when 7^{121} is divided by 13

5. Let x and y be positive integers, where $0 < x < y < 2022$. The ordered pairs $(x, y) =$ _____ is there such that $x^2 + 2022^2 = y^2 + 2021^2$

6. Let b be the minimum value of the function $y = |x-5| - |x-1| + |x+2| - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ for x between -3 and 7 . Then $b =$ _____

7. Find the area bounded by the curve $x^2 + y^2 = |x| + |y|$

8. 坐標平面上有一三角形 ABC ，直線 AB 所在的方程式為 $2x - y + 2 = 0$ ，直線 AC 所在的方程式為 $2x + y - 6 = 0$ ，若 $\triangle ABC$ 的外心為 $O(0, -3)$ ，且點 O 關於 \overline{AB} 的對稱點為 D 、點 O 關於 \overline{BC} 的對稱點為 E 、點 O 關於 \overline{AC} 的對稱點為 F ，則 \overline{EF} 長度為 _____

9. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，複數 $z = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{10}$ ，若 $\sum_{k=n}^{\infty} |z^{k+1} - z^k| < 10^{-20}$ ，則最小自然數 $n =$ _____。
($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$)

10. 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & x+3 \\ 3 & x+2 & x+1 \\ x+2 & x+3 & 1 \end{vmatrix}$ ，設方程式 $f(x-5) = 0$ 的有理根為 α ，方程式 $f(x^2-1) = 0$

的正實根為 β ，若有一四角錐，其底面是邊長為 α 公分的正方形，側稜之稜長均為 β 公分，則相鄰兩側面所夾之二面角 θ 之餘弦值為_____

11. 已知 p, q 均為正整數，設直線 $y = p^{\frac{1}{6}}x$ 與曲線 $y = q^{-\frac{1}{4}}x^2$ 在直角坐標平面上的圖形所圍成的區域面積為 $A(p, q)$ 平方單位，若 n 為正整數，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n A(k, k+1) =$ _____

12. 有一不透明袋中有 3 顆紅球、5 顆黃球、2 顆白球，每顆球被取到機會均等，今從袋中取球，一次取一球，取後隨即放回袋中，若取到白球即停止，則到停止時的取球次數期望值為_____次

13. 某考試分成 A 、 B 卷做測驗成績，每位考生的 A 、 B 卷得分總和即為該考生的總成績。若今有 n 位考生，在測驗結束後，經過統計計算，全體考生的 A 卷成績的算術平均數為 50 分，標準差為 15 分；而全體考生的 B 卷成績的算術平均數為 25 分，標準差為 10 分；而總成績的標準差為 23 分，則所有考生的 A 、 B 兩卷之得分的相關係數為_____

14. 設集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，取出集合 A 的三個非空子集，若滿足此三個集合的交集為空集合，且兩兩交集均不為空集合，則此三個非空子集的取法有_____種

15. 若 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - \left(\int_3^x (5t^3 - 10t^2 + 3t + 1) dt \right) + 12$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+4h) - f(3)}{5h} =$ _____

16. 設 $A(-1, 1, 3)$ 、 $B(1, 2, 3)$ 、 $C(2, 0, 4)$ 、 $D(1, 1, 1)$ ，若平面 E 包含 \overline{AB} ，且將四面體 $ABCD$ 切成兩部分，當平面 E 與四面體所截出的截面 PAB 的面積有最小值，點 P 的坐標為_____

二、計算證明題(共 2 題，每題 10 分)

1. Prove $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}$, where $\arctan x$ is the inverse function of $\tan x$

2. 設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 為二次實係數多項式，若 α, β 為 $f(x) = 0$ 之二實根，且 $\alpha < \beta$ 。

而 $g(x)$ 領導係數為 -1 的三次實係數多項式，且 $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$ ，則：

(1) 若函數 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 有極值為 -9 ，且 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍成的封閉區域面積為 36 ，試求二次函數 $f(x)$ 。

(2) 承(1)，若函數 $y = g(x)$ 的圖形通過坐標原點，且函數 $y = g(x)$ 在區間 $[-1, 0]$ 與 x 軸圍成的圖形為 \mathfrak{R} 。若將 \mathfrak{R} 繞 x 軸旋轉一圈，試求所得到的旋轉體體積。

一、填充題

1	2	3	4	5	6
$110\frac{5}{6}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{x \ln x - x}{\ln 10} + C$	7	(149,162)	-2
7	8	9	10	11	12
$2 + \pi$	$6\sqrt{5}$	93	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{12}$	5
13	14	15	16		
0.68	3395	-40	$(\frac{13}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{3})$		

二、計算證明題

1. 略

2. (1) $x^2 - 4x - 5$ (2) $\frac{1167}{35}\pi$