國立臺南女子高級中學111學年度第一次教師甄選試題卷

《數學科》

一、 填充題(每題4分，共60分)

1. 設$|z|=1$且$z^{11}+z-1=0$，試求複數z之值。

2. 設$[x]$表示小於或等於x的最大整數，令$a_n=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$，則$a_{2022}-a_{2021}=?$

3. 空間中，$L_1:\frac{x-2}{a}=\frac{y-5}{b}=\frac{z-7}{c}$，$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，$L_3:\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$。已知$L_1$和$L_2$交於$P$，$L_1$和$L_3$交於$Q$，則$\overline{PQ}=?$

4. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，將S的所有子集合個別印在不同的紙牌上後(即每張紙牌只印一個S的子集合)，將這些紙牌放入袋子中。現在自袋子內連續抽三次紙牌，每次抽完後都放回袋子中，則這三張卡片中，任兩張卡片上的集合之交集都是空集合的情形有幾種？

5. 設$f(x)$為10次的多項式函數，且對所有$n=0,1,2,3,\ldots,10$皆滿足$f(n)=\frac{n}{n+1}$，試求$f(11)=$______

6. 設z_1,z_2,z_3為相異複數，且滿足$|z_1-z_2|=5$、以及$z_1-(4+4i)z_2+(3+4i)z_3=0$，則$|z_1-z_3|=$______

7. 設$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$，若下列$x,y,z$的方程組

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)-2\right)x-3y-3z=0\\ 3x+y-z=0\\ 13x+7y-\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)z=0\end{cases}$$

有異於$x=y=z=0$之解，求θ的值=__________

8. 設三角形ABC是邊長為1的正三角形，$\overline{BC}$上有n等分點，沿點B到點C的方向，依次為$P_1,P_2,\ldots,P_{n-1}$，其中$n\ge2$；並令向量內積的和S_n為$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$

試求$S_n=$________（以n表示）

9. 「謙卑謙卑再謙卑」，任意改變這七個字的順序排成一列。現在從所有可能的排列情形任取一種，假設每種排列出現的機會均等，取到不出現任何「謙卑」一詞(例如「卑卑謙再卑謙謙」…等)的機率是多少？

10. 在坐標空間中，O為原點，$\overrightarrow{OP}=(sin\alpha-cos\beta,sin\alpha+2cos\beta,2sin\alpha+cos\beta)$，其中$0\le\alpha\le\frac{\pi}{6}$且$0\le\beta\le\frac{\pi}{3}$。求所有$P$點所成的區域面積。

11. 已知$s+\log_3 2, s+\log_9 2, s+\log_{27} 2$三數成等比數列，求此數列的公比。

12. 設空間中一直線$L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-k}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$，其中$k\in R$。考慮在所有可能的$k$值之下，點$P(-1,0,-3)$到直線$L$距離的最小值。

13. 已知集合$A=\left\{(x,y)\middle|x+ay=1\right\}, B=\left\{(x,y)\middle|ax+y=1\right\}, C=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=1\right\}$，若$(A\cup B)\cap C$為含有3個元素的集合，則$a$的值為何?

14. 已知二次函數$f(x)$與x軸交於$(-1,0)$且滿足$x\le f(x)\le \dfrac{1+x^2}{2}$，$\forall x\in R$。則$f(4)$的值為何?

15. 求$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

二、 計算證明題(需詳列計算、證明過程，否則不予計分。共 40 分)

1. 令$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{111}+i\sin\dfrac{2\pi}{111}$，其中$i=\sqrt{-1}$。試求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}$ 的值。(10 分)

2. 設實係數三次函數和一直線交於相異三點 A、B、C，若 B 為$\overline{AC}$中點，試證明：B 為此三次函數的反曲點。(15 分)

3. 已知 n 個相異的正奇數與 m 個相異的正偶數的和為 1000，求 $6n+8m$ 的最大值。(15 分)

簡答：

一、填充題(每題 4 分，共 60 分)

1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$	8	$3\sqrt{57}$	4096	$\frac{5}{6}$
6.	7.	8.	9.	10.
$\sqrt{32}$	$\frac{-\pi}{12}$	$\frac{5n^2-2}{6n}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
11.	12.	13.	14.	15.
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	$-1\pm\sqrt{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{8}{3}$

二、計算證明題(需詳列計算、證明過程，否則不予計分。共 40 分)

1. 令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{111}+i\sin\frac{2\pi}{111}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。試求 $\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}$ 的值。(10 分)

Sol：

因為 $\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{222-2k}}{\omega^{111-k}-1}$。因為 $\omega^{111}=1$，所以

$$\frac{\omega^{222-2k}}{\omega^{111-k}-1}=\frac{\omega^{-2k}}{\omega^{-k}-1}=\frac{1}{\omega^k-\omega^{2k}}=\frac{1}{\omega^k(1-\omega^k)}$$

所以 $\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}=\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k(1-\omega^k)}\cdots$①

令 $S=\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}$，

$$2S=\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}}{\omega^k-1}+\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k(1-\omega^k)}=\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{3k}-1}{\omega^k(\omega^k-1)}$$

因為 $\omega^{3k}-1=(\omega^k-1)(\omega^{2k}+\omega^k+1)$，所以

$$2S=\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{2k}+\omega^k+1}{\omega^k}=\sum_{k=1}^{110}\omega^k+1+\frac{1}{\omega^k}$$

因為 $\omega^{111}-1=0$，所以 $\sum_{k=0}^{110}\omega^k=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{110}\omega^k=-1$，

$\sum_{k=1}^{110}\frac{1}{\omega^k}=\sum_{k=1}^{110}\frac{\omega^{111}}{\omega^k}=\sum_{k=1}^{110}\omega^{111-k}=\sum_{k=1}^{110}\omega^k=-1$。

故 $2S=-1+110-1=108\Rightarrow S=54$

2. 設實係數三次函數和一直線交於相異三點 A、B、C，若 B 為 $\overline{AC}$ 中點，試證明：B 為此三次函數的反曲點。(15 分)

證明：設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

將三次函數及直線同時向右平移 $\frac{b}{3a}$ 及向下平移 d，

則平移後的三次函數可化簡成 $g(x)=ax^3+px$ 且設 A、C 平移後分別為 $A'(r,ar^3+pr)$ 、$C'(s,as^3+ps)$

設 B' 為 B 平移後的點，因 B 為 $\overline{AC}$ 中點，故 B' 為 $\overline{A'C'}$ 中點，即 $B'(\frac{r+s}{2},\frac{ar^3+pr+as^3+ps}{2})$

又 B' 在 $g(x)=ax^3+px$ 上 $\therefore \frac{ar^3+pr+as^3+ps}{2}=a(\frac{r+s}{2})^3+p(\frac{r+s}{2})$

$\therefore \frac{ar^3+pr+as^3+ps}{2}=a\times\frac{(r+s)^3}{8}+p(\frac{r+s}{2})$

又 a 不為 0

$\therefore 4(r^3+s^3)=r^3+3r^2s+3rs^2+s^3$

$\therefore 3r^3-3r^2s-3rs^2+3s^3=0$

$\therefore (r+s)(r-s)^2=0$

因 A、C 是相異的點，可知 $r+s=0$，可得 $B'(0,0)$

所以 B' 為平移後的三次函數對稱中心(反曲點)

可得 B 為 $f(x)$ 的反曲點。

3. 已知 n 個相異的正奇數與 m 個相異的正偶數的和為 1000，求 $6n+8m$ 的最大值。(15 分)

Sol:

$\because [1+3+5+\cdots+(2n-1)]+[2+4+6+\cdots+2m]=n^2+m(m+1)\leq 1000$

$\therefore n^2+(m+\frac{1}{2})^2\leq 1000\frac{1}{4}$

由柯西不等式可得

$$6n+8m=6n+8(m+\frac{1}{2})-4\leq\sqrt{(6^2+8^2)\left[n^2+(m-\frac{1}{2})^2\right]}-4\leq 10\sqrt{1000\frac{1}{4}}-4<312.3$$

$\Rightarrow 6n+8m\leq 312$

$\because n:\left(m+\frac{1}{2}\right)$ 會接近 $3:4$

$\therefore \begin{cases} n=18, m=24 \Rightarrow n^2+m(m+1)=924<1000 \\ n=20, m=24 \Rightarrow n^2+m(m+1)=1000=1000 \end{cases}$

此時 $\Rightarrow 6n+8m=6\times 20+8\times 24=312$