

--	--

111 學年度市立高級中等學校

正式教師聯合甄選

數學科 題本

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答

※請先確認你的答案卡(本)、准考證與座位號碼是否一致無誤。如有不同應立即請監試委員處理。使用非本人答案卡(本)作答者，不予計分。

請閱讀以下測驗作答說明

測驗說明：

這是數學科題本，題本採雙面印刷。測驗時間 100 分鐘，作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

作答注意事項：

1. 選擇題由電腦閱卷，限使用 2B 鉛筆作答。劃記不清楚致電腦無法判讀，由應考人員自行負責。
2. 非選擇題以黑筆或藍筆作答。
3. 劃記任何不相關記號及以其他顏色筆作答者不予計分。考試結束，答案卡(本)務必繳回，未繳回者以零分計算。

請聽到鈴（鐘）聲響後再翻頁作答

試題公告
僅供參考

壹、選擇題：佔20分（第1題為單選題，第2—4題為多選題，每題5分）

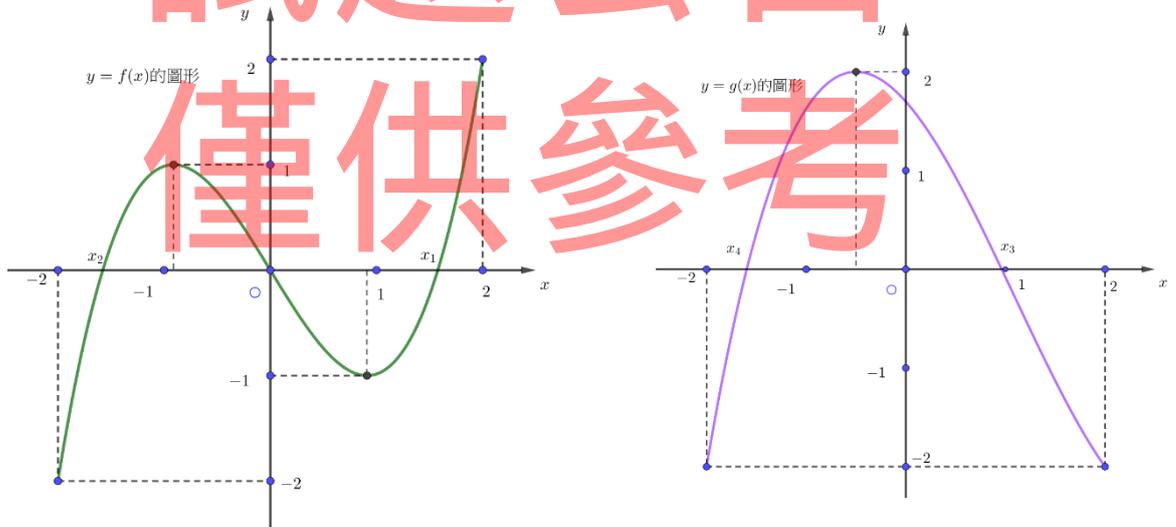
1. 設數列 $\{a_n\}$ 有21項，其中 $a_1=1, a_{21}=15$ ，且滿足 $|a_{k+1}-a_k|=1, k=1,2,\dots,20$ 。

試問共有幾個滿足此條件的不同數列？

- (A) 969
(B) 1140
(C) 1330
(D) 1220

2. 下圖是多項式函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在區間 $[-2,2]$ 的圖形，圖中 $1 < x_1 < 2$ 、 $-2 < x_2 < -1$ 、 $0 < x_3 < 1$ 、 $-2 < x_4 < -1$ 。試問下列哪些敘述是正確的？

- (A) 在區間 $[-2,2]$ 中，若方程式 $f(x)=k$ 有3個相異實根，則 $-1 \leq k \leq 1$
(B) $f(x)$ 一定是3次函數
(C) $g(x)$ 的首項係數一定是正數
(D) 在區間 $[-2,2]$ 中，方程式 $f(g(x))=0$ 恰有6個實根
(E) 在區間 $[-2,2]$ 中，方程式 $g(f(x))=0$ 恰有4個實根



3. $f(x)$ 為連續函數，已知 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=5, f(5)=8, f(6)=13$ 。下列何者是 $f(7)$ 可能的值？

- (A) 0
(B) 1
(C) 13
(D) 21
(E) 34

4. 設三個非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 兩兩不平行，且 $3\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$, $2\vec{a} + 5\vec{b} + \vec{c} = (1, 2, 6)$ 。試選出正確的選項。

(A) 向量 \vec{a} 和向量 \vec{b} 所張出的平行四邊形面積，是向量 \vec{a} 和向量 \vec{c} 所張出的平行四邊形面積的 $\frac{4}{5}$ 倍

(B) 向量 \vec{c} 和向量 $2\vec{a} + 5\vec{b}$ 所張出的平行四邊形面積，與向量 $(1, 2, 6)$ 和向量 $2\vec{a} + 5\vec{b}$ 所張出的平行四邊形面積相同

(C) 平面 $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ 和平面 $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ 的交線有一方向向量為 $(3, 4, 5)$

(D) 平面 $a_1x + b_1y + c_1z = 1$ 和平面 $a_2x + b_2y + c_2z = 2$ 的交線有一方向向量為 $(2, 5, 1)$

(E)
$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$
 恰有一組解 $(x, y, z) = (2, 5, 1)$

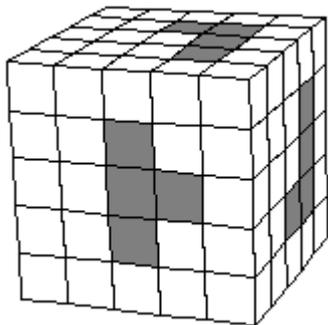
貳、非選擇題：估80分

一、填充題：估40分（共8題，每題5分）

1. 化簡 $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45}$ 成一個最簡分數。

2. 每個位數皆為偶數的正整數中，請問2022是第幾小的數？
(例如：2是第1小(最小)、4是第2小、20是第5小。)

3. 下圖的方塊由 $5 \times 5 \times 5$ 個小立方體組成，依陰影所標示，分別從上、右、前三個面，鑿穿過整個方塊，請問剩下多少個小立方體？



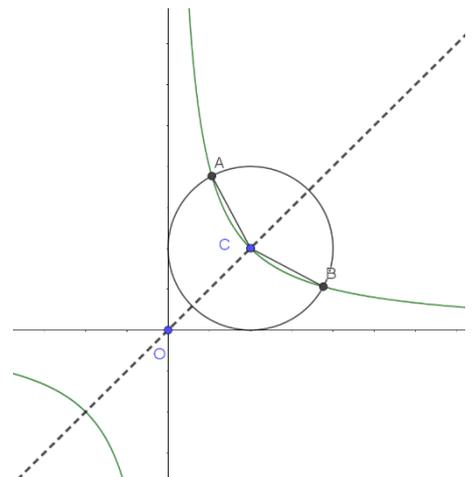
4. 在複數平面上，方程式 $128x^7 + 64x^6 + 32x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$ 與 $64x^6 - 16x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ 的共同根的乘積為何？

5. 三角形 ABC 內接於一直徑為 $5\sqrt{13}$ 的圓， D 點在 \overline{AC} 上，且 $\angle ABD = 90^\circ$ 。已知 $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AD} = 13$ ，試求 \overline{CD} 長。

6. 將 2 顆相同的黑球、3 顆相同的白球、4 顆相同的紅球排成一列，假設每一種排列的結果出現的機會均等。試問：在 2 顆黑球不相鄰的條件下，3 顆白球都不相鄰的機率為何？

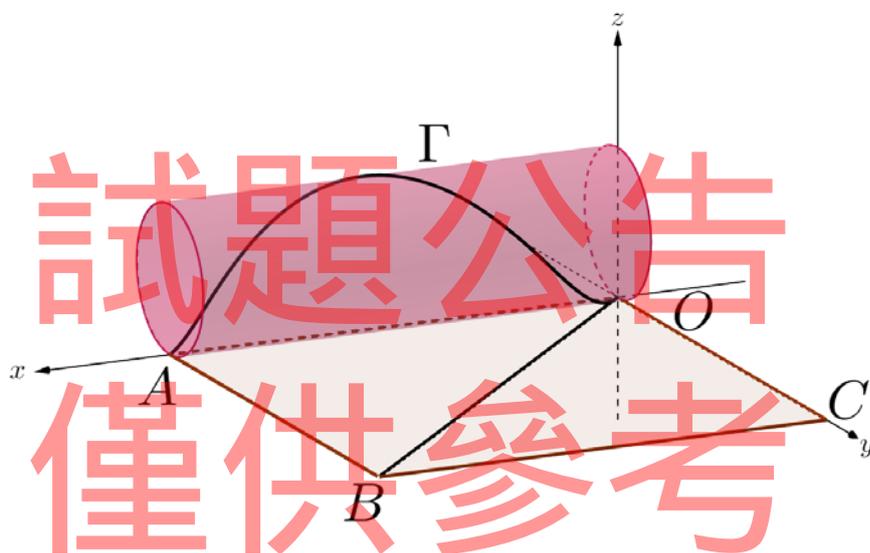
7. 已知 P 點在函數 $y = 2e^x$ 上， Q 點在函數 $y = \ln \frac{x}{2}$ 上，試求 \overline{PQ} 長度的最小值 = _____。

8. 坐標平面上，圓 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圓心為 C ，曲線 $y = \frac{1}{x}$ 與圓 C 交於 A 、 B 兩點。試求 $\cos \angle ACB$ 的值 = _____。



二、計算證明題：佔40分（共4題，每題10分）

1. 在坐標平面上，圓 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ 經過一個二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & c \end{bmatrix}$ 的線性變換後，得到中心在 $(6,18)$ 且面積為 75π 的圖形 Λ ，試求此二階方陣 A 。
2. 將一張邊長為100的正方形紙 $OABC$ 放在 xy 平面上， O 在原點 $(0,0)$ 處， A 在 $(100,0)$ 處， C 在 $(0,100)$ 處，畫對角線 \overline{OB} 。今將此正方形紙片捲一圈成為一圓柱形，使得 \overline{OA} 與 \overline{CB} 重疊，原對角線 \overline{OB} 在空間中形成一曲線 Γ （如下圖所示）。
 - (1) 試寫出曲線 Γ 投影在 yz 平面上的方程式 $f(y,z)=0$ 。(5分)
 - (2) 試寫出曲線 Γ 投影在 xy 平面上的函數 $y=g(x)$ 。(5分)



3. 空間坐標中， $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z \leq 21$ 被平面 $x - 2y - 2z = 3$ 所截的區域在平面 $x + y + kz = 1$ 的投影面積最大為何？
4. 令函數 $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ ，試回答下列各小題：
 - (1) 試求 $\sum_{k=1}^{100} f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$ 的值。(4分)
 - (2) 試求定積分 $\int_0^1 xf(x)dx$ 的值。(6分)