

國立成功大學數學系

107 學年度

學士班申請入學

數學學科筆試

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

准考證號碼：_____

姓名：_____

試題說明：

1. 本試題含九大題，總分一百分。測驗時間：150 分鐘
2. 請在每一試題所屬頁面作答，若使用試題背面，請標示清楚。
3. 請完整寫出解答過程。

| 題號 | 滿分 | 得分 |
|----|----|----|
| 1 | 10 | |
| 2 | 10 | |
| 3 | 10 | |
| 4 | 10 | |
| 5 | 15 | |
| 6 | 15 | |
| 7 | 10 | |
| 8 | 10 | |
| 9 | 10 | |
| 總分 | | |

1. (10%) 假設 $0 < a < 1$ 且 $b = a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2}$ ，試求出 ab 之值。

2. (10%) 假設 a 為實數，證明多項式方程式 $x^3 + x^2 + x + a = 0$ 只有一個實根。(可參考提示：可假設此多項式方程式的三個根分別為 α, β, γ ，並計算 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 之值)。

3. (10%) 令 C_1 表示一半徑為1的圓而 T_1 表示 C_1 的一個圓內接正三角形，定義 C_2 為 T_1 的內切圓，再取 C_2 的一圓內接正三角形 T_2 依此類推得到圓 $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ 。試問 n 為多少時， C_n 的半徑開始小於 $\frac{1}{1000}$ 。($\log 2 \approx 0.3010$)

4. (10%)圓錐曲線 Q 為以下二次曲線方程所決定

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 16y + 2 = 0。$$

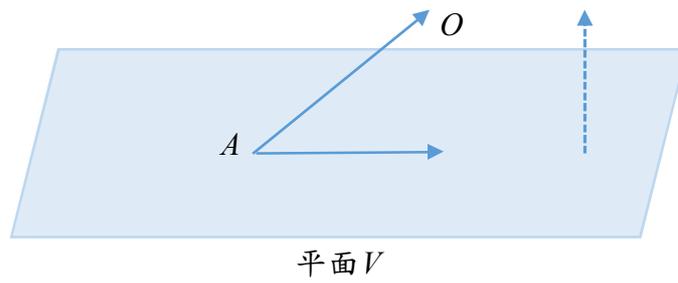
(a) (5%)請找出一個旋轉矩陣 $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ，使得在新坐標

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 下，原方程可以化簡為以 x', y' 為變數的標準二

次曲線方程。(提示：標準式沒有交錯項 $x'y'$ 項)。

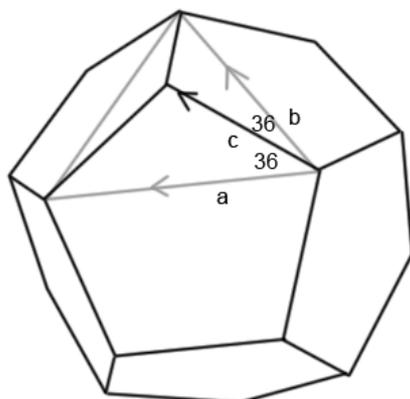
(b) (5%)請判斷 Q 為橢圓、雙曲線、或是拋物線並找出其焦點。

5. (15%) 記空間中的原點為 $O = (0,0,0)$ ，並給定三個點 $A = (1,0,2)$ ， $B = (1,1,0)$ ， $C = (0,2,3)$ 。



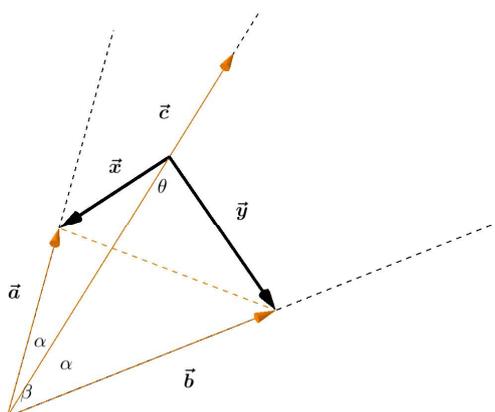
- (a) (5%) 若 V 是過點 A, B, C 的平面，試求 \overline{OA} 與平面 V 的夾角。
- (b) (5%) 試求 \overline{OA} 至平面 V 的正射影。
- (c) (5%) 試求四面體 $OABC$ 的體積。

6. (15%) 我們將計算正十二面體之兩面角，正十二面體圖如下圖所示。



下圖為截取上方圖中十二面體的一部分。

已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 長度均為 1，且 \vec{x}, \vec{y} 皆垂直於 \vec{c} ，如圖所示。



記 θ 為 \vec{x}, \vec{y} 的夾角。若 \vec{a}, \vec{c} 的夾角與 \vec{b}, \vec{c} 的夾角為 α ，且 \vec{a}, \vec{b} 的夾角為 β 。

- (a) (5%) 請以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 與 α, β 來表示 \vec{x}, \vec{y} 。
- (b) (5%) 請以 α, β 的三角函數值表示 $\cos \theta$ 。
- (c) (5%) 試計算 $\cos 36^\circ$ ，並由 (b) 算出正十二面體相鄰兩面的兩面角 θ 之 $\cos \theta$ 值。(提示：若 $A = 36^\circ$ 則 $2A = \pi - 3A$)。

(本頁空白)

7. (10%) 某扭蛋機裡面包含 3 種不同款式之扭蛋無限個。假設每投幣 10 元會掉下一顆扭蛋而獲得任一款式的機率均為 $\frac{1}{3}$ 。假設每次投幣所獲得的扭蛋款式不受其他次投幣結果影響。試求
- (a) (5%) 集滿 3 種不同款式扭蛋所需投幣次數小於等於 5 的機率。
- (b) (5%) 要集滿 3 種不同款式之扭蛋所需花費之期望值(提示: 定義 a_k 為已收集到 k 種不同款式的扭蛋情況下要達成目標所需的剩餘投幣次數期望值, $k = 0, 1, 2, 3$ 。很明顯地, $a_3 = 0$ 。找出 a_0, a_1, a_2, a_3 彼此間的關聯)。

8. (10%) 籃球比賽規則中，每次被犯規罰兩球且每投進一球得 1 分。假設阿中被犯規 3 次，試求在下列不同情況下阿中從罰球中恰好獲得 4 分的機率是多少？
- (a) (5%) 每次罰球命中率均為 7 成。(可用組合數 C_n^m 表示答案)
- (b) (5%) 每次被犯規的第一次罰球命中率均為 7 成。若第一球有進籃則第二球之命中率也是 7 成。若第一球沒進則會受心理壓力影響，第二球命中率降為 6 成。

9. (10%) 某次數學測驗共有 25 題是非題，每答對一題得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 15 題可答對而剩餘的 10 題全亂猜(猜對的機率是 0.5)。
- 試問他這次測驗得分之期望值為多少?(可用組合數 C_m^n 表示答案)