

國立嘉義高級中學 110 學年度第 1 次教師甄選—數學科試題

一、 填充題(共 10 題，每題 8 分，共 80 分)

- 1、 將編號 1, 2, 3, 4, 5, 6 的六顆球放入編號 1, 2, 3, 4, 5, 6 的六個箱子，每個箱子各有一顆球。每個箱子的編號與所含的球的編號皆不相同的放球方法有幾種？
- 2、 設 N 表示正整數 1314588 的所有正因數的和，寫出 N 的質因數分解。
- 3、 設 a 、 b 、 c 為正實數且滿足 $a+b^2+c^3=11$ ，求 abc 的最大值。
- 4、 設 $f(x)$ 是一個多項式且滿足 $f(1)=f(4) \neq f(2)=f(3)$ ，求 $f(x)$ 的最低次數。
- 5、 在地平面的三點 A 、 B 、 C ，分別測得某大樓的樓頂的仰角為 30° 、 60° 、 45° ，已知 A 、 B 、 C 三點共線且 $\overline{AB} = \overline{BC} = 50$ 公尺，求樓高。
- 6、 設三角形 ABC 的 BC 邊上有一點 D ， AC 邊上有一點 E ， AB 邊上有一點 F ，若 AD 、 BE 和 CF 交於一點且 $\overline{BD} = \overline{CE} = 3$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{AE} = 4$ ，求 $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$ 之值。
- 7、 已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ ，求 7^{30} 的十進位表示法的位數。
- 8、 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n + 1$ 且 $a_0 = 1$ 、 $a_1 = 2$ ，求 a_{50} 。
- 9、 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 為實數，已知 $A^2 = A$ 且 A 不是零矩陣或單位矩陣，求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 的最小值。

10、設拋物線 $\Gamma: y = x^2 + x + 1$ ，由 $A(1, -2)$ 作 Γ 的兩條切線得切點 B 和 C ，求 $\triangle ABC$ 的面積

二、計算證明題(共 2 題，每題 10 分，共 20 分)

1. 證明 $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ 是無理數。

2. 票箱中有甲、乙兩人的選票分別為 m 張和 n 張且 $m > n$ 。令 $P_{m,n}$ 表示開票的過程中甲的選票會一路領先乙的選票的機率，回答以下的問題：

(1) 計算 $P_{m,1}$ 和 $P_{m,2}$

(2) 證明
$$P_{m,n} = \frac{m}{m+n} P_{m-1,n} + \frac{n}{m+n} P_{m,n-1}$$

(3) 先猜測 $P_{m,n}$ 的答案，再利用(2)使用歸納法證明你的猜測。

[試題結束]