110 年國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試試題【數學科】

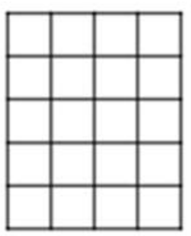
一、填充題:(每題 5 分，共 70 分)

1. 設直線 L 過點 $(1,2)$ 且分別交 x 軸、y 軸的正向於 A、B 兩點，由 A、B 分別作直線 $3x+y+3=0$ 的垂線，垂足為 C、D，則 $\overline{CD}$ 長度的最小值為 ________。

2. 已知三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足以下三條件：
(I)若 $f(\alpha)=\beta$，則 $f(-2-\alpha)=4-\beta$ 恆成立
(II)存在水平直線與函數 $y=f(x)$ 的圖形有三個交點，
(III) a,d 為整數且 $ad=3$
則 $f(x)=$ ______________。

3. 正 ΔAOB 中，$M\in\overline{OA}$ 且 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}, N\in\overline{OB}$ 且 $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NB}$，設 $\overline{BM}$ 與 $\overline{AN}$ 交於 P，則 $\sin\angle AOP=$ ________。

4. 如圖，將一塊矩形的厚紙板劃分成面積相等的 $5\times4=20$ 個小正方格，今欲將三枚不同顏色的棋子任意放置於小正方格的中心處且每個小正方格至多只能放置一枚棋子。則這三枚棋子可構成三角形的三個頂點之機率為________。



5. 設 $F(x)=\int_0^x (x-t)\cdot\sin^2 t\,dt$，則 $F'(\frac{\pi}{3})=$ ________。

6. 若方程式 $2\sin x+3\cos x=k$ 在區間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 中恰有兩個相異實根，則 k 的範圍為________。

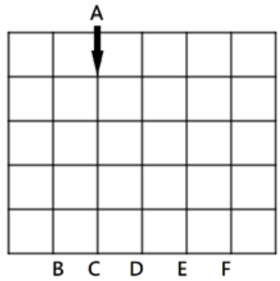
7. 求無窮級數和 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)(k+3)}=$ ________ 。

8. 設 $n,k\in N$，且 $C_4^{20}+C_5^{20}=C_k^n$，則數對 $(n,k)=$ _________ 。(全對才給分)

9. 介於 $\sqrt{433}$ 與 $\sqrt{434}$ 之間的有理數中，分母最小的最簡分數 $\frac{q}{p}=$ ________， 其中 p,q 須為正整數。

背面有試題

10. 有一張由5×6個正方形所組成的格線紙如右圖，小強想沿著實線以向左，向右及向下的方向將格線紙剪成兩張面積相等的紙張，並且先由A點先向下剪一格，最後從B,C,D,E,F其中一點剪斷紙張，請問有________種不同的剪法。



11. 空間中有四點P,A,B,C，滿足$\overrightarrow{AP}=(-4,5,-2)$，$\overrightarrow{BP}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{CP}=(-6,-5,4)$，若實數$\alpha,\beta$可使$\left|\overrightarrow{CP}-\alpha\overrightarrow{AP}-\beta\overrightarrow{BP}\right|$有最小值，則$\alpha-\beta$之值為______。

12. 已知整係數多項式$f(x)=x^7+ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$，其中$a,b,c,d,e,f,g$為不大於9的相異非負整數，若$x^3+x^2+x+1$為$f(x)$的因式，則滿足條件的多項式$f(x)$有________個。

13. 設$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，試求出$\dfrac{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{6\cos 2x}$的最小值為________。

14. 已知H為ΔABC的垂心，且$6\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{CA}$，則$\sin A$之值為________。

二、計算證明題:(每題10分，共30分)

1. 設數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_n=\dfrac{1}{a_{n-3}}(a_{n-2}\cdot a_{n-1}+3)$，$n\ge 4$。
試證：此數列每一項都是整數。

2. 已知橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，動圓$C:x^2+y^2=R^2$，其中$4<R<5$。若$A$是橢圓$\Gamma$的點，$B$是動圓$C$上的點，且直線$AB$與橢圓$\Gamma$和動圓$C$均相切，求$A$、$B$兩點距離的最大值？此時$R$值為何？

3. 有三實數x_1,x_2,x_3滿足$x_1<x_2<x_3$。已知實係數函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$在$x=x_1,x_3$有極值，且$f(x_1)=x_3, f(x_3)=x_1$，試求出$x$的方程式
$\left[3a(f(x))^2+2bf(x)+c\right](f(x)-x_2)=0$相異實根個數，並說明之。

110 年國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試答案卷【數學科】

一、 填充題 (每題 5 分，共 70 分)

1. $\dfrac{7\sqrt{10}+4\sqrt{15}}{10}$

2. $f(x)=3x^3+9x^2+5x+1$

3. $\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$

4. $\dfrac{88}{95}$

5. $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

6. $3\le k<\sqrt{13}$

7. $\dfrac{5}{36}$

8. (n, k) = (21, 5) =(21, 16) =(20349, 1) =(20349, 20348)

9. $\dfrac{229}{11}$

10. 80

11. -3

12. 336

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

14. $\dfrac{\sqrt{195}}{15}$

二、計算證明題 (每題 10 分，共 30 分)

1. 略

2. 當 $R=2\sqrt{5}$ 時，有最大值 1

3. 7 個