

二、計算證明題 (4 題，每題 10 分，共 40 分)

1. 設定義在實數  $\mathbb{R}$  上的奇函數  $f(x)$  對稱於直線  $x=1$ ，試回答下列問題：

(1) 證明： $f(x)$  是週期為 4 的週期函數。(4 分)

(2) 若  $0 < x \leq 1$  時，函數  $f(x) = \log_3 x$ 。

試求  $f(x) = -\frac{1}{3}$  在區間  $(0, 10)$  內所有實根之和。(6 分)

2. 設  $a, b, c$  為正數，且  $abc = 1$ ，試求  $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)}$  的最小值。(10 分)

3. 有一橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，已知右焦點  $F(1, 0)$ ，且  $P$  為  $\Gamma$  上的動點。設直線  $PF$  與  $\Gamma$  交於另一點  $Q$ ，過  $F$  做直線  $PF$  的垂線交  $\Gamma$  於點  $R$  與點  $S$ 。若定義  $r = \overline{PF}$ ，且以  $x$  軸正向為始邊，射線  $FP$  為終邊所成的角度為  $\theta$ 。

(1) 試將  $r$  用  $\theta$  表示。(4 分)

(2) 點  $P$  在  $\Gamma$  上移動時，試求  $\overline{PF} + \overline{QF} + \overline{RF} + \overline{SF}$  的最小值。(6 分)

4. 若  $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$  在  $x=c$  時有最大值。

(1) 試求  $c$  之值。(3 分)

(2) 若  $y = f(x)$  與  $x$  軸和  $x=c$  圍成封閉區域  $D$ ，試求  $D$  的面積。(4 分)

(3) 試求將  $D$  繞  $x$  軸旋轉所得之體積。(3 分)