

二、計算證明題 (4 題，每題 10 分，共 40 分)

1. 設定義在實數 \mathbb{R} 上的奇函數 $f(x)$ 對稱於直線 $x=1$ ，試回答下列問題：

(1) 證明： $f(x)$ 是週期為 4 的週期函數。(4 分)

(2) 若 $0 < x \leq 1$ 時，函數 $f(x) = \log_3 x$ 。

試求 $f(x) = -\frac{1}{3}$ 在區間 $(0, 10)$ 內所有實根之和。(6 分)

2. 設 a, b, c 為正數，且 $abc = 1$ ，試求 $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)}$ 的最小值。(10 分)

3. 有一橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，已知右焦點 $F(1, 0)$ ，且 P 為 Γ 上的動點。設直線 PF 與 Γ 交於另一點 Q ，過 F 做直線 PF 的垂線交 Γ 於點 R 與點 S 。若定義 $r = \overline{PF}$ ，且以 x 軸正向為始邊，射線 FP 為終邊所成的角度為 θ 。

(1) 試將 r 用 θ 表示。(4 分)

(2) 點 P 在 Γ 上移動時，試求 $\overline{PF} + \overline{QF} + \overline{RF} + \overline{SF}$ 的最小值。(6 分)

4. 若 $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ 在 $x=c$ 時有最大值。

(1) 試求 c 之值。(3 分)

(2) 若 $y = f(x)$ 與 x 軸和 $x=c$ 圍成封閉區域 D ，試求 D 的面積。(4 分)

(3) 試求將 D 繞 x 軸旋轉所得之體積。(3 分)