

一、填充題 (12 題，每題 5 分，共 60 分)

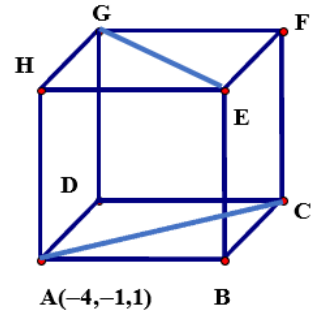
1. 雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦點 F_1, F_2 ，設 $P(x', y')$ 為 Γ 上的異於頂點的動點，若 $r(x')$ 為 ΔPF_1F_2 的內切圓半徑，則 $\lim_{x' \rightarrow \infty} r(x') = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 如圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 的頂點 $A(-4, -1, 1)$ ，

已知直線 $AC: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-2}$ ，

直線 $GE: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$

試求此長方體的體積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



3. 在連續投擲一均勻銅板 10 次的實驗中，反面未曾連續出現 2 次或 2 次以上的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 方程式 $3 \cdot (2^x + 1) = y^2 + 2y$ 之所有正整數解 (x, y) 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(全對才給分)

5. 已知有無窮多個正整數 n 滿足 n^3 的末兩位數字是 44，這些正整數 n ，第二小者為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 設紅、黑、白三種顏色的球各 10 個，現在將它們全放入甲乙兩個袋子中，現在要求每個袋子中都有三種顏色的球，且甲乙兩個袋子中三種顏色的球數的乘積相等，試問滿足此條件的球有幾種放法。

7. 設曲線 Γ 的方程式為 $\begin{cases} (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1 \\ |x| \leq 1 \text{ 且 } |y| \leq 1 \end{cases}$ ， R 為曲線 Γ 所圍區域。若以直線 $L: x+y=1$ 為軸，旋轉 R 所得的旋轉體體積為 V ，則 $V = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 已知 I 為 ΔABC 的內切圓之圓心，且 $\overline{CA} + \overline{AI} = \overline{BC}$ ，若 $\angle BCA = 42^\circ$ ，則 $\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} -x^4 + 2x, & x \leq 0 \\ \log_2(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ，若對於所有實數 x ， $|f(x)| \geq ax$ 恆成立，試求 a 的取值範圍為_____。
10. 設方程式 $x^{109} + 4x^{104} + 1 = 0$ 的 109 個根為 $r_n, n=1,2,\dots,109$ 。若多項式 $Q(x)$ 為 109 次多項式且 $Q(x) = 0$ 的 109 個根為 $r_n + \frac{1}{r_n}, n=1,2,\dots,109$ ，則 $\frac{Q(1)}{Q(-1)} =$ _____。
11. 甲乙兩人使用撲克牌玩「抽鬼牌」的遊戲。進行一段時間後，甲手中剩下 1,2,3,4,5 共五張牌，而乙手中剩下 1,2,3,4,5 以及鬼牌共六張牌。現自甲開始兩人輪流向對方抽一張牌，且每張牌被抽到的機率相等。若抽到的牌號碼和自己手中某一張牌的號碼相同，則將這兩張相同號碼的牌丟棄；若抽到的牌是鬼牌，則需將鬼牌留在自己手中。如此進行下去直到其中一人手上沒有牌，手上沒牌者獲勝。則甲獲勝的機率為_____。
12. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) =$ _____。