

# 臺北市立松山家商100學年度第1次教師甄選初試 數學科 試題卷

※請在答案卷上作答

一、填充題：(第 1, 2 題，每題 5 分；第 3 至 12 題，每題 6 分)

1. 已知  $x, y$  均為正整數，則方程式  $x^2 + y^2 = 208(x - y)$  的解  $(x, y)$  為\_\_\_\_\_。
2.  $a \in R$ ，已知方程式  $x^3 - 4x^2 + 8x + a = 0$  有一虛根之絕對值為 2，則此方程式的所有根為何？\_\_\_\_\_。
3. 函數  $f(n)$  為正整數  $n$  的各位數的數字平方和，如  $f(123) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ ，且定義： $f_1(n) = f(n)$ ， $f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$ ，其中  $k$  為任意正整數。則  $f_{2011}(2011)$  之值為\_\_\_\_\_。
4. 設  $a, b, c$  均為實數， $abc < 0, a + b + c > 0$ ，令  $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{ab}{|ab|} + \frac{ac}{|ac|} + \frac{bc}{|bc|}$ ，則  $ax^3 + bx^2 + cx + 1$  之值為\_\_\_\_\_。
5. 已知袋中有黃球 3 個，綠球 4 個，紅球 5 個，每次取 1 球，取後不放回，直到取完所有球為止，則紅球最先取完的方法有\_\_\_\_\_種。
6. 設直線  $L$  過原點  $(0, 0)$  且與兩直線  $L_1: 2x + y - 8 = 0$ ， $L_2: x + 2y + 6 = 0$  形成一個等腰三角形，則直線  $L$  的方程式為\_\_\_\_\_。
7. 有兩組數據  $X$  與  $Y$ ，如下表：

$X$	2	3	5	5	6	8	9	10
$Y$	4	6	7	9	11	12	14	17

則  $y$  對  $x$  的最佳直線方程式為\_\_\_\_\_。
8. 設  $a, b, c$  均為正實數，則  $\frac{a^3 + b^3 + 4}{(a+1)(b+1)}$  的最小值為\_\_\_\_\_。
9. 設  $\overline{AB}$  為圓  $C$  之直徑，在圓  $C$  內部區域任取一點  $P$ ，則  $\angle APB > 150$  度之機率為\_\_\_\_\_。
10. 設  $a_1 = 1, a_2 = 2, (a_{n+2})^3 = \frac{(a_{n+1})^4}{a_n}$ ，其中  $n$  為任意正整數，則數列  $\langle a_n \rangle$  之極限值為\_\_\_\_\_。
11. 小松和小山兩人輪流擲一個硬幣。不論由誰擲出，每當出現正面時，小松得 1 分，出現反面，則小山得 1 分。當滿足下列任一條件時，則遊戲停止：
  - (1) 有一人得到 6 分。
  - (2) 有一人得到 4 分以上(包含 4 分)，且領先另一人達 3 分。

問：遊戲停止時，過程共有幾種不同的可能情形？\_\_\_\_\_。
12. 對任意正整數  $n \geq 4$ ，令  $a_n$  表示  $n$  進位的循環小數  $(0.\overline{133})_n$ ，將  $a_4, a_5, \dots, a_{99}$  等數的乘積寫成  $\frac{m}{p!}$  的形式，其中  $m, p$  為正整數，且  $p$  盡可能小，則  $m$  之值為何？\_\_\_\_\_。

二、計算與證明題：(每題 10 分)

1. 設橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )，則其外切矩形面積  $A$  之範圍為何？
2. 請證明： $\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln n}{n}$ ，其中  $n \in N$  且  $n \geq 3$ 。
3. 如圖，四邊形  $ABCD$  為圓內接四邊形， $P$  為  $\overline{AB}$  中點， $\overline{PE} \perp \overline{AD}$ ， $\overline{PF} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{PG} \perp \overline{CD}$ ，且  $\overline{PG} \perp \overline{EF}$  相交於  $M$  點，請證明： $M$  為  $\overline{EF}$  中點。

