淺談連分數

許介彥
大葉大學　電信工程學系

前言

我們在中學都背過求一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

假設某人不想用上面的公式直接求出方程式 $x^2-2x-1=0$ 的根，他採用如下的作法：將 $2x+1$ 移到等號右邊，然後將等號兩邊同時除以 x（x 顯然不爲 0），得

$$x=2+\frac{1}{x}$$

既然 x 等於 $2+1/x$，他將上式等號右邊的 x 以 $2+1/x$ 取代，得

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}$$

上式右邊的 x 還是可以繼續用 $2+1/x$ 取代；經過多次取代後將得

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}}}$$

當然，這樣的動作可以無窮盡地進行下去。他這樣做對求出原方程式的根有任何幫助嗎？

每一次取代都會讓右邊的分數往下多出一層，如果我們將各階段還未被取代的 $1/x$ 忽略，將得到一連串的分數：

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\ 2\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\ \ldots$$

它們的值分別是

$$2,\ \frac{5}{2}=2.5,\ \frac{12}{5}=2.4,\ \frac{29}{12}=2.41666...,\ \ldots$$

由求根公式我們知道 x 的一個可能的值爲

$$x=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=1+\sqrt{2}=2.41421...$$

因此隨著取代次數的增加，所算出來的分數「似乎」越來越接近實際值。

真的是這樣嗎？答案是肯定的；這是本文將探討的主題。

連分數的定義

數學上將形如

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\mathrm{O}}}}$$

的分數稱為「連分數」（continued fractions），其中的 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ 與 $b_1,b_2,b_3,\ldots$ 可以是任意實數或複數，而項數可為有限或無限。

如果一個連分數中的 $b_1,b_2,b_3,\ldots$ 都是 1，而且除了 a_1 以外的其他 $a_2,a_3,a_4,\ldots$ 都是正整數（a_1 可為任意整數），我們將這種連分數稱為「簡單連分數」(simple continued fractions)，它們具有如下形式：

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}$$

為了節省空間，上面的連分數也常被寫為

$$a_1+\frac{1}{a_2}\,{}_{+}\,\frac{1}{a_3}\,{}_{+}\,\frac{1}{a_4}\,{}_{+}\cdots \text{ 或 } [a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots].$$

有理數與連分數

在本刊第 251 期「漫談最大公因數」一文中，筆者曾經介紹將任意一個有理數表為連分數的方法，其轉換過程與輾轉相除法有密切的關聯；由於輾轉相除法一定會在有限的步驟內終止，因此任何一個有理數一定能被表為項數有限的簡單連分數（finite simple continued fraction）；反過來說，任何一個項數有限的簡單連分數經由持續通分也一定能被表為兩個整數相除的形式。

舉例來說，由於

$$\frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\cfrac{1}{\cfrac{29}{9}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{9}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{9}{2}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}$$

因此 $67/29$ 表為連分數的結果為 $[2,3,4,2]$；另一方面，由連分數 $[2,3,4,2]$ 持續通分一定能得出有理數 $67/29$。除了正數外，負的有理數同樣可以表為簡單連分數，例如 $-81/44$ 可表為 $[-2,6,3,2]$（請讀者自行驗證）。

$[2,3,4,2]$ 是否是將 $67/29$ 表為簡單連分數的唯一方式呢？由觀察以上將 $67/29$ 表為連分數的過程您可能會認為答案是肯定的，這個想法基本上沒錯，不過由於

$$2=1+\frac{1}{1}$$

因此 $[2,3,4,2]$ 其實又等於 $[2,3,4,1,1]$。讀者不難自行證明：如果 p 與 q 為任意整數（$q\neq 0$）且

$$\frac{p}{q}=[a_1,a_2,\ldots,a_n]=[a_1',a_2',\ldots,a_n']$$

那麼 a_1 一定會等於 a_1'，由此又可推知 a_2 等於 a_2'，由此又可推知 a_3 等於 a_3'……等。

一般而言，任何一個有理數表爲簡單連分數的方式都有且僅有兩種，這兩種方式只在最後一個階段有差別，其中一種方式的最後一個數爲 1，而另一種方式則不是 1，因爲當 a_n 不等於 1，

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$$

一定會等於

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

而如果 a_n 等於 1，那麼

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$$

一定等於

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1].$$

漸近分數的計算

假設有理數 p/q 表爲連分數的結果爲

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

如果我們在某個階段將連分數還未算完的部分捨棄，所得的分數稱爲此連分數的一個「漸近分數」(convergent)；我們稱

$$c_i = [a_1, a_2, \ldots, a_i]$$

爲此連分數的第 i 個漸近分數（$i \le n$）。請注意第 n 個漸近分數 c_n 就是此連分數本身。

假設我們以遞迴的方式定義兩個數列如下：

$p_1 = a_1$, $p_2 = a_1 a_2 + 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = a_2$，而當 $i > 2$ 時，

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}$$

以下我們將利用數學歸納法證明：當 $1 \le i \le n$，漸近分數 c_i 的值等於 p_i / q_i。在下面的證明過程中我們將放寬對 $a_2, a_3, \ldots, a_n$ 等數的限制，假設它們可以是任意非零實數而不必一定是整數。

首先，當 $i = 1$ 時，

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$

而當 $i = 2$ 時，

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

因此我們所要證明的性質在 $i = 1$ 及 $i = 2$ 時皆成立。假設所要證明的性質在 $i = 1, 2, \ldots, k$ 時皆成立（$k < n$）；由於

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] \\ &= [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, (a_k + \frac{1}{a_{k+1}})] \end{aligned}$$

因此我們可將 c_{k+1} 寫爲只有 k 項的連分數，此時的 c_{k+1} 與 c_k 同樣都有 k 項，而且它們的前 $k-1$ 項完全相同（只有第 k 項不同）；由前述遞迴定義可知 $p_{k-2}, q_{k-2}, p_{k-1}, q_{k-1}$ 的值只與連分數的前 $k-1$ 項有關而與第 k 項無關，不因第 k 項是 a_k 或 $a_k + 1/a_{k+1}$ 而有差別；既然

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k] = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

應有

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, (a_k + \frac{1}{a_{k+1}})]$$

$$= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}}$$

將分子與分母同時乘以 a_{k+1} ，得

$$c_{k+1} = \frac{(a_{k+1}a_k + 1)p_{k-1} + a_{k+1}p_{k-2}}{(a_{k+1}a_k + 1)q_{k-1} + a_{k+1}q_{k-2}}$$

也就是

$$c_{k+1} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

因此我們要證明的性質在 $i = k+1$ 時亦成立；數學歸納法的證明於焉完成。

如果我們將相同的遞迴關係往前應用到 p_2 與 q_2 ，得

$$\begin{cases} p_2 = a_2 p_1 + p_0 = a_2 a_1 + 1 \\ q_2 = a_2 q_1 + q_0 = a_2 \end{cases}$$

因此我們可令 $p_0 = 1$ 且 $q_0 = 0$；再將相同的關係往前應用到 p_1 與 q_1 ，又可得

$$\begin{cases} p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = a_1 \\ q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = 1 \end{cases}$$

因此我們又可令 $p_{-1} = 0$ 且 $q_{-1} = 1$ ，這些初始條件要比我們前面所用的 p_1, p_2, q_1, q_2 簡單好記得多（雖然 p_{-1}/q_{-1} 與 p_0/q_0 其實並非漸近分數）。有了以上較簡單的初值，我們可將 p_i 與 q_i 的定義改寫為

$$p_i = \begin{cases} 0 & i = -1 \\ 1 & i = 0 \\ a_i p_{i-1} + p_{i-2} & i > 0 \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} 1 & i = -1 \\ 0 & i = 0 \\ a_i q_{i-1} + q_{i-2} & i > 0 \end{cases}$$

由這些遞迴定義我們可以很容易地求得一個簡單連分數的各個漸近分數；由 q_i 的定義我們又不難推知當 $i \geq 2$ 時，q_{i+1} 一定會大於 q_i ，因此 q_i 隨著 i 的增大而嚴格遞增，這個性質我們稍後會用到。

漸近分數的差

假設 $p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ 為任意有理數，$c_i = p_i / q_i$ 為其第 i 個漸近分數，其中的 p_i 與 q_i 如前面的定義。以下是兩個與漸近分數有關的基本定理。

定理一：

當 $i \geq 0$ 時，

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}}$$

也就是說，

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i .$$

證明：

利用數學歸納法。當 $i = 0$ 時，

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$$

因此式子成立。假設所要證明的性質在 $i = k$ 時成立，則當 $i = k+1$ 時，

$$p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1}$$

$$= (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1})$$

$$= a_{k+1}p_kq_k + p_{k-1}q_k - a_{k+1}p_kq_k - p_kq_{k-1}$$

$$= -(p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

因此所要證明的性質在 $i = k+1$ 時亦成立；根據數學歸納法得證。

由定理一馬上可得出一個結論：p_i 與 q_i 一定互質（因爲 p_i 與 q_i 的公因數一定是 1 的因數）；因此依據前面的定義算出來的漸近分數 $c_i = p_i / q_i$ 一定已經是最簡分數。

由於 q_i 隨著 i 的增大而增大，由定理一我們又可推知兩個相鄰漸近分數的差（即 $|c_i - c_{i-1}|$）會隨著 i 的增大而越來越小。

定理二：

當 $i \geq 1$ 時，

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{(-1)^{i-1}a_i}{q_iq_{i-2}}$$

也就是說，

$$p_iq_{i-2} - p_{i-2}q_i = (-1)^{i-1}a_i .$$

證明：

直接推導即可：

$$\begin{aligned} &p_iq_{i-2} - p_{i-2}q_i \\ &= (a_ip_{i-1} + p_{i-2})q_{i-2} - p_{i-2}(a_iq_{i-1} + q_{i-2}) \\ &= a_i(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1}) \\ &= a_i(-1)^{i-1}. \qquad \text{（由定理一）} \end{aligned}$$

由於當 $i \geq 3$ 時，a_i, q_i, q_{i-2} 都是正整數，由定理二可知 $c_i - c_{i-2}$ 與 $(-1)^{i-1}$ 同號，因此 $c_3 - c_1 > 0, c_5 - c_3 > 0, c_7 - c_5 > 0, \cdots$，而且 $c_4 - c_2 < 0, c_6 - c_4 < 0, c_8 - c_6 < 0, \cdots$，所以

$$c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \Lambda \quad \text{（嚴格遞增）}$$

且

$$c_2 > c_4 > c_6 > c_8 > \Lambda \quad \text{（嚴格遞減）}$$

又由定理一可知 $c_2 > c_1, c_4 > c_3, c_6 > c_5, \cdots$ 等，綜合以上關係可得

$$c_1 < c_3 < c_5 < \Lambda < c_n = \frac{p}{q} < \Lambda < c_6 < c_4 < c_2$$

無理數與連分數

經由連續通分，一個項數有限的簡單連分數一定可以寫成 p/q 的形式，因此一個無理數不可能可以表爲項數有限的簡單連分數。以下我們將說明：每個無理數都可以表爲含有無窮多項的簡單連分數（轉換過程與有理數的情形類似）。

假設 x 爲任意一個無理數，我們首先將 x 寫爲

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad 0 < \frac{1}{x_2} < 1$$

其中的 $a_1 = \lfloor x \rfloor$（即所有小於或等於 x 的整數中最大的整數），而

$$x_2 = \frac{1}{x - a_1} > 1$$

一定是一個無理數（否則 $1/x_2$ 爲有理數，使得 x 爲有理數）；我們接著又可將 x_2 寫爲

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad 0 < \frac{1}{x_3} < 1$$

其中的 $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$，而

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} > 1$$

也一定是無理數；此時

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}} = [a_1, a_2, x_3].$$

如果我們讓這個過程無止盡地進行下去：

$$x = [a_1, x_2] = [a_1, a_2, x_3] = [a_1, a_2, a_3, x_4] = \cdots$$

最後將得到一個含有無窮多項的簡單連分數（infinite simple continued fraction）：

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}} = [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

舉例來說，如果我們將上述過程應用到無理數 $\sqrt{2}$ ，由於 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，因此

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

而

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

又由於 $2 < \sqrt{2}+1 < 3$，因此

$$x_3 = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

而

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

我們注意到 x_2 與 x_3 都等於 $\sqrt{2}+1$ ，可以預測接下來的 $x_4, x_5, x_6, \ldots$ 也都將等於 $\sqrt{2}+1$，因此以上步驟重複無窮多次後所得的連分數將是 $[1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$（可仿照循環小數的記法簡單記作 $[1, \overline{2}]$ ）。

這衍生出幾個問題：我們能否證明連分數 $[1, \overline{2}]$ 的值是 $\sqrt{2}$ 呢？對任意一個含有無窮多項的簡單連分數（例如 $[1, 2, 3, 4, \ldots]$ 或 $[2, \overline{1, 5, 4}]$ ）而言，其值是否一定會收斂於某個無理數？如果是的話又是多少呢？

無窮連分數的值

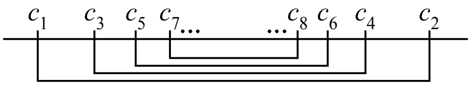
對一個含有無窮多項的簡單連分數 $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$，我們仍稱 $c_i = [a_1, a_2, \ldots, a_i]$ 為其第 i 個漸近分數。前面我們曾經討論並證明了幾個與項數有限的簡單連分數有關的性質，讀者如果回頭看看，不難發現那些性質（包括 p_i 與 q_i 的定義以及定理一和定理二等）其實和項數是否有限無關，它們同樣適用於含有無窮多項的簡單連分數。

我們前面已經看過數列 $c_1, c_3, c_5, \ldots$ 一定是嚴格遞增數列（ $c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \cdots$ ，此時有無窮多項）而且它們全都小於 c_2（它們其實也全都小於 c_4 及 c_6 等)，由單調數列的收斂性，我們知道此數列一定有極限值。同理，由於 $c_2 > c_4 > c_6 > c_8 > \cdots$ 且它們全都大於 c_1（它們其實也全都大於 c_3 及 c_5 等），所以數列 $c_2, c_4, c_6, \ldots$ 也一定有極限值；這兩個數列都有極值而且數值較小的數列越來越大，數值較大的數列越來越小。我們首先想要回答的問題是：這兩個數列的極值是否相等呢？也就是說，對任意一個無窮連分數 $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$，其值是否一定會收斂於某個無理數？

答案是肯定的，而且理由很簡單。我們由定理一已經知道對任意正整數 k，

$$c_{2k}-c_{2k-1}=\frac{(-1)^{2k}}{q_{2k}q_{2k-1}}=\frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}}>0$$

而由於 $q_1,q_2,q_3,\ldots$ 皆爲正整數且嚴格遞增，因此 $c_{2k}-c_{2k-1}$ 的值隨著 k 的增大而越來越小，也就是 $c_2-c_1>c_4-c_3>c_6-c_5>\cdots$；當 k 趨於無窮大時，$c_{2k}-c_{2k-1}$ 的值將趨於 0，因此數列 $c_1,c_3,c_5,\ldots$ 與數列 $c_2,c_4,c_6,\ldots$ 的極值一定相等（見下圖）。



無理數與連分數的對應

如果我們利用前述轉換步驟由無理數 x 得出無窮連分數 $[a_1,a_2,a_3,\ldots]$，到目前爲止我們固然已經知道 $[a_1,a_2,a_3,\ldots]$ 一定會收斂於某個無理數，但是我們尚未能斷言此數一定就是原來的 x（因爲轉換過程涉及「無窮多」個步驟，含有不確定的成份）；雖然此數的確會是 x，不過這是需要被證明的；以下我們進行這項工作。

首先，假設經過幾個步驟後，無理數 x 已被轉換爲

$$x=[a_1,a_2,\ldots,a_n,x_{n+1}]$$

其中的 $n\geq 2$ 而且 x_{n+1} 是一個大於 1 的無理數；對上面這個含有 $n+1$ 項（項數有限）的連分數而言，x 一定等於其第 $n+1$ 個漸近分數，因此

$$x=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}$$

x 與它的第 n 個漸近分數的差爲

$$\begin{aligned}x-\frac{p_n}{q_n}&=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\\&=\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}\\&=\frac{-(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n+q_{n-1})}\end{aligned}$$

由於

$$x_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{x_{n+2}}>a_{n+1}$$

因此

$$x_{n+1}q_n+q_{n-1}>a_{n+1}q_n+q_{n-1}=q_{n+1}$$

所以

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}$$

又由於 $q_1,q_2,q_3,\ldots$ 皆爲正整數且嚴格遞增，因此當 n 趨於無窮大時，$c_n=p_n/q_n$ 將趨近於 x，亦即由 x 經前述步驟轉換所得的連分數 $[a_1,a_2,a_3,\ldots]$ 的值的確是 x；證明完畢。

除了漸近分數的極值會等於 x 外，對任意連續兩個漸近分數 c_{n-1} 與 c_n 而言，我們也不難證明 c_n 一定會比 c_{n-1} 更靠近 x；我們同樣假設經過幾個步驟後，無理數 x 已被轉換爲 $x=[a_1,a_2,\ldots,a_n,x_{n+1}]$（$n\geq 2$），此時

$$x=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}$$

即

$$x(x_{n+1}q_n+q_{n-1})=x_{n+1}p_n+p_{n-1}$$

移項整理得

$$\begin{aligned} x_{n+1}(xq_n - p_n) &= -(xq_{n-1} - p_{n-1}) \\ &= -q_{n-1}(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) \end{aligned}$$

等號兩邊同時除以 $x_{n+1}q_n$ ，得

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \left(-\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right)\cdot\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

因此

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right|\cdot\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

由於 $x_{n+1} > 1$ 且 $q_n > q_{n-1} > 0$ ，因此

$$\left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right| < 1$$

可知

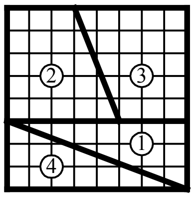
$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

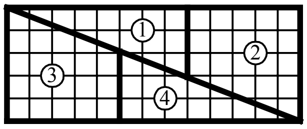
也就是 $|x - c_n| < |x - c_{n-1}|$ ；因此漸近分數所形成的數列不僅收斂於 x，而且每一項都比前一項更靠近 x。

綜合以上所述，我們知道要將任何一個無理數表為含有無窮多項的簡單連分數都有而且僅有一種方式，這種無理數與無窮連分數之間的對應關係是一對一且映成的。

費氏數列與連分數

下面兩個圖中，上圖是一個 8×8 的正方形，下圖則是一個 5×13 的長方形：





有一點相當奇怪：經由如圖中所示的裁割，這兩個圖似乎都可由相同的三角形與梯形拼湊而成，但這是不可能的，因為 $8^2 = 64$ 而 $5\times 13 = 65$，兩個圖形的面積並不相等。您看得出問題在哪裡嗎？

所有包含無窮多項的簡單連分數中以 $[1,1,1,1,\mathrm{K}]$ 看起來最單純，這個數是多少呢？如果我們稱此數為 ϕ ，那麼 ϕ 顯然滿足

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi},\ 即\ \ \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

其正根為

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803...$$

這是有名的黃金比（golden ratio），它的漸近分數依序為

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \mathrm{K}$$

這些分數的分子與分母皆由費氏數列構成（由 p_n 與 q_n 的遞迴定義可知），而且每個分數都是費氏數列的相鄰兩項的比值，因此對相鄰的任意兩個分數而言，後項的分母都等於前項的分子；又由定理

一可知

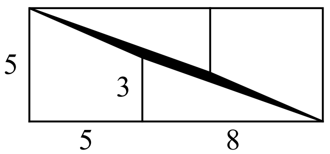
$$p_{2n}q_{2n-1}-p_{2n-1}q_{2n}=(-1)^{2n}=1$$

因此

$$p_{2n}q_{2n-1}-q_{2n}^{2}=1$$

所以大小為 $p_{2n}\times q_{2n-1}$ 的長方形與邊長為 q_{2n} 的正方形的面積之差為 1，這個量對較大的長方形及正方形而言可說是微不足道，在畫圖時除非將圖畫得很大或是用筆尖較細的筆來畫，否則肉眼並不易察覺圖中線條的不盡吻合之處。

以前面的兩個圖來說，其中的長方形內部其實並不會被位於其上的三角形與梯形完全覆蓋，其間還留有一個長長扁扁的平行四邊形區域；畫得誇張一點將如下圖：



此平行四邊形的底為 $\sqrt{3^2+8^2}\approx 8.544$，高則約為 $1/8.544\approx 0.117$。

幾何觀點

德國數學家 Felix Klein（1849−1925）於西元 1895 年提出了以下關於無理數所對應的無窮連分數在幾何上奇妙的解釋。

假設坐標平面的每個格子點（即 x 坐標與 y 坐標皆為整數的點）上都釘著一根大頭針。對任意正無理數 α，我們作直線 $y=\alpha x$；這條直線一定不會通過任何格子點（因為 $\alpha=y/x$ 為無理數）。

想像我們在第一象限內沿著直線 $y=\alpha x$ 拉一條細長的繩子，繩子的一端位於原點（握在我們手上），另一端則被固定在直線 $y=\alpha x$ 上與原點距離無窮遠的某個點上；如果我們此時抓著繩子位於原點的這一端往旁邊拉開並注意隨時將繩子繃緊，繩子將會被位於某些格子點上的大頭針卡住；同理，如果我們將繩子往另一個方向拉開，繩子也將被另外一些大頭針卡住；有趣的地方是：這些在第一象限中將繩子卡住的每根大頭針的位置都對應到 α 的一個漸近分數，其中位於直線下方的針的坐標為 $(q_1,p_1),(q_3,p_3),(q_5,p_5),\ldots$，而位於直線上方的則是

$(q_2,p_2),(q_4,p_4),(q_6,p_6),\ldots$。

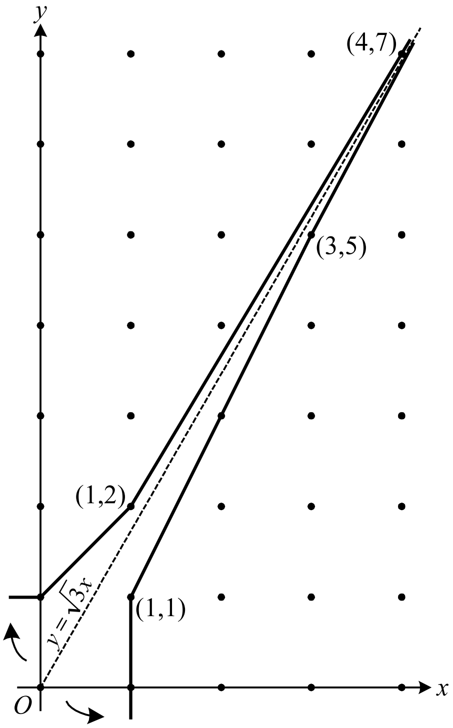
下圖所示為 $\alpha=\sqrt{3}$ 的情形；$\sqrt{3}$ 所對應的連分數為

$$\sqrt{3}=[1,1,2,1,2,1,2,\ldots]=[1,\overline{1,2}]$$

其漸近分數依序為

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\ldots$$

圖中位於直線下方的繩子會被坐標為 $(1,1),(3,5),(11,19),\ldots$ 的針卡住，而直線上方的繩子則會被坐標為 $(1,2),(4,7),(15,26),\ldots$ 的針卡住。



除了漸近分數外，與連分數有關的許多性質也都在幾何上有對應的解釋，例如如果我們以 P_n 代表坐標爲 (q_n, p_n) 的點，那麼我們前面用來定義 p_i 與 q_i 的遞迴關係相當於說明了由 P_{n-2} 至 P_n 的向量一定是由原點 O 至 P_{n-1} 的向量的整數倍，而定理一則說明了 $\Delta OP_{n-1}P_n$ 的面積必爲 $1/2$ 。

結語

連分數的相關研究在當前的數學界並非主流，在中學數學教育裡亦不大受到重視，不過卻是十七及十八世紀的數學家們喜歡研究的題材，著名數學家如 Brouncker（1620−1684）、Euler（1707−1783）、Lambert（1728−1777）、Lagrange（1736−1813）等都曾經對這個領域作出大的貢獻，例如 Brouncker 將 π 表成了下面的連分數：

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}}$$

而 Euler 則將 $e-1$ 表爲下面兩個連分數（e 爲自然對數的底數）：

$$e-1 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots}}}}}$$

$$e-1=[1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots].$$

由上式可得 e 爲無理數的證明。

如果我們規定項數有限的連分數的最後一項不得爲 1，那麼如同無理數一般，有理數與簡單連分數之間的對應也是一對一且映成的。既然每個實數都可以對應到唯一一個簡單連分數，我們是否能以連分數取代一般的數值表示方式呢？要將數值表爲連分數並不難，困難是發生在要作加減乘除等運算時；到目前爲止數學家還找不到較簡單的方法來處理連分數之間的算術運算。

連分數的一個主要應用是用來做爲無理數的近似值，亦即用有理數來逼近無理數（這個領域常稱爲 Diophantine Approximation）。我們前面曾經看過，當 $n \ge 2$ 時下式成立：

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}$$

由此很容易導出以下定理：對任意無理數 x 與正整數 Q，必存在整數 p 與 q 使得

$$|qx-p|\le\frac{1}{Q}\text{，也就是 }\left|x-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{qQ}.$$

很明顯，只要我們選擇某個 $q_{n+1}\ge Q$，那麼

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}\le\frac{1}{q_nQ}$$

因此 $p=p_n$ 及 $q=q_n$ 即合乎所求。由於 $q_1,q_2,q_3,\ldots$ 可遞增至無窮大，這樣的選擇有無窮多種。

以下我們看這個定理的另一種證法。考慮下列 $Q+1$ 個數：

$$0x-\lfloor 0x\rfloor,\ 1x-\lfloor 1x\rfloor,\ldots,\ Qx-\lfloor Qx\rfloor$$

它們全都落在 $[0,1)$ 區間內，因此其中必有某兩數的距離小於 $1/Q$；假設這兩數爲 $sx-\lfloor sx\rfloor$ 與 $tx-\lfloor tx\rfloor$（$0\le s<t\le Q$），我們令 $q=t-s$ 且 $p=\lfloor tx\rfloor-\lfloor sx\rfloor$，如此一來 $q\le Q$ 且

$$\begin{aligned}|qx-p|&=|(t-s)x-(\lfloor tx\rfloor-\lfloor sx\rfloor)|\\&=|(tx-\lfloor tx\rfloor)-(sx-\lfloor sx\rfloor)|<\frac{1}{Q}\end{aligned}$$

因此 p 與 q 合乎所求。這個定理是由數學家 L. Dirichlet 提出的，他採用的是後面這種證法，所根據的正是他著名的「鴿籠原理」(Pigeonhole Principle)。

上面的兩種證法以哪一種較「好」呢？第一種證法需要對連分數的性質有基本的瞭解，第二種證明方式則相當簡潔而且幾乎不須具備任何背景知識，看起來似乎以第二種證法較好；不過如果我們除了要證明 p 與 q 的存在之外還想實際找出它們的值呢？上述第二種證法中的 p 與 q 在最壞的情況下須將所有 $Q+1$ 個數全部算出來之後才找得到，而第一種證法中的 p 與 q 卻可利用遞迴關係很快地求得（$q_1,q_2,q_3,\ldots$ 增大的速度很快，呈指數成長），就尋找 p 與 q 所需的計算量而言，連分數的作法會比鴿籠原理的作法好得多；第二種證法真的只是證明了 p 與 q 的「存在」，是純粹的 existence proof。

除了本文提及的性質外，連分數還具有許多相當美妙的性質；如果有朝一日數學家們能夠解決連分數在運算上的不便，也許這些性質將有重受矚目的一天。

練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

1. 試證：若 $p>q>0$ 且 $p/q=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$，則 $q/p=[0,a_1,a_2,\ldots,a_n]$；反之，若 $q/p=[0,a_1,a_2,\ldots,a_n]$，則 $p/q=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$。

2. 對任意正整數 a 與 b，連分數

$$a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cdots}}}$$

的值爲何？

3. 求出(1) $[2,\overline{2,4}]$ (2) $[1,3,\overline{1,2,1,4}]$ 的值。

4.求出連分數

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\Lambda\ \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}}}$$

的值；其中的阿拉伯數字 2 總共出現了 100 次。

5. 如果 $p_1/q_1, p_2/q_2, \mathrm{K}, p_n/q_n$ 爲連分數 $[1,2,3,\mathrm{K}, n]$的漸近分數，試證：

$$\begin{aligned} p_n = \ & (n-1)p_{n-1} + (n-1)p_{n-2} + (n-2)p_{n-3} \\ & + \Lambda + 3p_2 + 2p_1 + (p_1+1). \end{aligned}$$

6.由

$$\frac{45}{16} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}$$

說明一個 16×45 的長方形可以由兩個 16×16 的正方形、一個 13×13 的正方形、四個 3×3 的正方形與三個 1×1 的正方形共同組成。

7.利用圓規與沒有刻度的直尺在一已知線段 $\overline{AB}$ 上標出一點 G 使得

$$\overline{AB} : \overline{AG} = \overline{AG} : \overline{GB}.$$

參考資料

1.許介彥（2002），漫談最大公因數，科學教育月刊，第 251 期。

2.許介彥（2003），不一樣的鴿籠原理，科學教育月刊，第 265 期。

3.G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford, 1979.

4.K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and Its Applications*, 4th edition, Addison-Wesley, 1999.

（上承第 51 頁）

評析

這個證明題取自亞太奧林匹亞數學競賽的試題，是屬於高中程度較好的學生的競賽試題，但發現部分國中生也能把此題證得非常漂亮，也希望其他同學也能夠花一點時間靜下心來去做證明題， 雖然國中教的不多，但訓練自己的邏輯思考與推理的能力也是非常好的。

也提供此題的做法：

四邊形 ABCD 的四邊等長，所以是菱形

∠ABC=60°，∠BAC=∠BCA=60°

ΔABC、ΔACD 是正Δ，

$\because \overline{AD} // \overline{BC}, \overline{AB} // \overline{CD}$

$\therefore \dfrac{\overline{EA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{DF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$ ，$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

$\therefore \dfrac{\overline{EA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$ ，∠EAC=∠FCA=180°-60°=120°

ΔEAC～ΔACF（SAS 相似）

∠AEC=∠CAF，又∠ACE=∠ACE

∴ΔEAC～ΔAMC（AA 相似）

$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CA}}$ 　$\therefore \overline{CA}^2 = \overline{CM} \times \overline{CE}$