台北市立建國高級中學第六十六期通訊解題題目解答與評析

6601

紙上寫有 1,2,…,2008 這 2008 個正整數，第 1 步劃去前面 4 個數 1,2,3,4，在 2008 後面寫上劃去的 4 個數的和 10，第 2 步再劃去前面 4 個數 5,6,7,8，在最後面寫上劃去的 4 個數的和 26；如此下去（每步劃去前面 4 個數，在最後面寫上劃去的 4 個數的和），到最後剩下一個數為止，所有寫出的數（包括原來的 1,2,…,2008）的總和是多少？

【解答】

『方法一』

（1）假定原先有 4^k 個數，其和為 S，當 4^k 個數劃完，需要 4^{k-1} 步，紙上剩下 4^{k-1} 個數，這 4^{k-1} 個數的和等於原來 4^k 個數得和 S，故當最後剩下一個數時，所有寫出的數的總和是 $(k+1)S$。

（2）$2008=4^5+984$，原來的數經過 $\dfrac{984}{3}=328$ 步後，剩下 4^5 個數，被劃去的數有 $328\times4=1312$ 個，它們是 1,2,…,1312，而紙上剩下的 4^5 個數之和就是 $1+2+\cdots+2008$，因此，最後剩下一個數時，所寫出數的總和為 $(1+2+\cdots+1312)+6(1+2+\cdots+2008)=12963544$

『方法二』台北市民生國中姚驊庭的作法，略加修改。

以下黑字為寫上的數字，紅字為每組剩下的數字，

第一組：2008 個

1,2,⋯,2008

第二組：502 個

(1＋2＋3＋4),(5＋6＋7＋8),⋯⋯,(2005＋2006＋2007＋2008)

第三組：125 個，剩下 2 個

(1＋⋯＋16),(17＋⋯＋32),⋯⋯,(1985＋⋯＋2000) ,(2001＋⋯＋2000) ,(2002＋⋯＋2008)

第四組：31 個，剩下 3 個

(2001＋⋯＋2008,＋1＋⋯＋32),(33＋⋯＋96),⋯,(1889＋⋯＋1952),(1953＋⋯＋1968) ,(1969＋⋯＋1984) ,(1985＋⋯＋2000)

第五組：8 個，剩下 2 個

(1953＋⋯＋2008,＋1＋⋯＋32), (33＋⋯＋288), ⋯,(1569＋⋯＋1824) , (1825＋⋯＋1988),(1989＋⋯＋1952)

第六組：2 個，剩下 2 個

(1825＋⋯＋2008,＋1＋⋯＋288), (289＋⋯＋1312), (1313＋⋯＋1568),(1569＋⋯＋1824)

第七 組：1 個

(1＋⋯＋2008)

所寫出數的總和為以上七組中黑字的數字的總和，總和為

$(1+2+\cdots+1312)+6(1+2+\cdots+2008)=12963544$

【評析】

1. 『方法二』台北市民生國中姚驊庭的作法，是根據題意按部就班畫記、計算得到解答。硬算，亦是解決數學問題的方法之一，同學們可從過程中訓練自己演繹、歸納的能力。
2. 『方法一』利用歸納出本題的規律性『假定原先有 4^k 個數，其和為 S，當 4^k 個數劃完，需要 4^{k-1} 步，紙上剩下 4^{k-1} 個數，這 4^{k-1} 個數的和等於原來 4^k 個數得和 S，故當最後剩下一個數時，所有寫出的數的總和是 $(k+1)S$』而解決此題。
3. 本題參與徵答的同學中，一些同學的作答中或有錯誤、或是不完整，同學作答之後應再作檢驗，當可減少錯誤，以期作答更完整。
4. 解題的訓練，不是答案作出來就 OK 了！可進一步思考、歸納這個數學問題是否有規律性？是否有其他的解法？可否推廣至一般性？這部份的思考、研究會讓您獲益良多！

本題參與徵答人數有 10 人，分數如下：

得 7 分者，3 人：

台北市民生國中姚驊庭　台中市居仁國中郭昱廷　台北市民生國中陳士鈞

得 5 分者，3 人：

台中縣光德國中陳和謙　台北市民生國中洪欣均　台北市民生國中張育僑

得 4 分者，1 人：

6602

有2008張卡片 ，編號：1,2,3,4,------,1000，

在編號是2的倍數卡片印上一個”*”記號；

在編號是4的倍數卡片再增加印上一個”*”記號；

在編號是8的倍數卡片再增加印上一個”*”記號；

在編號是16的倍數卡片再增加印上一個”*”記號，

然後停止印卡片的動作。(例如：編號是64的卡片因為是16的倍數，所以共印上4個”*”記號。)

將卡片由編號1,2,3,----,1000號順著正整數的編號開始數”*”記號的次數，則第2008個”*”記號是在編號哪一張上？

【解答】

找出規律

將 1-16 號卡片的” ※”記號依序標出

卡片號碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
※個數	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4

1-16 號共標有 15 個※號

17-32 號也標有 15 個※號

2008 ÷16=133---13

第 13 個標號標於第 16 張卡片上

16×134=2144

但只有 2008 張卡片，故此題無解

(桃園縣新興國中陳宗蔚與台中市居仁國中王嘉賢提供)

【評析】

這是一個非常簡單的數學問題，運用因數倍數與計數的方法來處理即可，惜因所問的問題『第 2008 個”*”記號』的卡片編號超過 2008，故此題看到學生的答題情形可分為兩種：一為超過編號無解，另一個為把第 2008 個※編號的卡片

算出來，但整體來說，同學都答得非常好，以下是他們的得分情形

就讀國中	姓 名	得分	就讀國中	姓 名	得分
台北縣江翠國中	廖浩翔	7	台中市居仁國中	黃顯博	6
桃園縣新興國中	陳宗蔚	6	台中市光德國中	陳和謙	3
台中市居仁國中	王嘉賢	7	台北縣丹鳳國中	張昱政	7
台北市民生國中	姚驊庭	7	台北縣江翠國中	廖伯穎	7
台北市民生國中	黃　振	7	基隆市銘傳國中	林琨欽	6
台北市民生國中	張育僑	6	基隆市銘傳國中	林益平	7

6603

找出所有的質數 p ,使得 p^2+2639 至少有 16 個不同的正因數。

【解答】

(1) $p=2$, $p^2+2639=2643=3\times881$，有 $(1+1)(1+1)=4$ 個正因數。

(2) $p=3$, $p^2+2639=2648=2^3\times331$，有 $(3+1)(1+1)=8$ 個正因數。

(3) $p>3$ 時，

$\because p\equiv\pm1 \pmod 3$ $\quad\therefore p^2+2639\equiv2640\equiv0 \pmod 3$。

又 p 為奇數，$\therefore p^2\equiv1 \pmod 8$，則 $p^2+2639\equiv2640\equiv0 \pmod 8$

即 $3\mid(p^2+2639)$ 且 $8\mid(p^2+2639)$，

所以 $p^2+2639=24k=2^3\times3\times k$, 其中 $k>24$。

則 p^2+2639 至少有 $(3+1)(1+1)(1+1)=16$ 個不同的正因數。

因此，若 p 是大於 3 的質數，則 p^2+2639 至少有 16 個不同的正因數。

【評析】

本題是檢驗同學們是否清楚標準分解式中正因數個數的求法；同時也要能將整數適當地分類，來檢驗一個整數是否能有 3 或 8 的因數。

參與徵答同學數有 6 人，皆能採取有效的方法討論出所求的 p 值。其中得滿分 7 分的同學有 3 人：台北市民生國中張育僑；台北縣江翠國中廖柏穎；台中市居仁國中蔡哲平同學。

另外，3 位同學皆得 6 分，都是需要將證明寫的更完整：

桃園市新興國中陳宗蔚同學的「可得 $3n^2\pm n+220$ 為偶數」與台北市民生國中姚驊庭同學的「發現 $2n^2+n+330$ 為 3 的倍數」皆須要說明清楚。至於台北市民生國中黃振同學證明過程的敘述也

要再加強。

6604

設$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=7$，則$x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}$之值為何？

【解答】解法：

『方法一』

$\because \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=7$

同乘$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$，得

$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=7\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$

$\Rightarrow 4=7\left(xy-x\sqrt{y^2+4}-y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}\right)$

$xy-x\sqrt{y^2+4}-y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=\frac{4}{7}\cdots$①

又由條件乘開

$xy+x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=7\cdots$②

②式－①式，得

$2\left(x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{45}{7}$

故$x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=\frac{45}{14}$

『方法二』

由條件乘開

$xy+x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=7\cdots$①

令$x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=z$

則式①化為$z+xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=7$

$\Rightarrow 7-z=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}$

平方得$49-14z+z^2=x^2y^2+(x^2+1)(y^2+4)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}\cdots$②

又 $z^2=\left(x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2=x^2(y^2+4)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}$

代入②得 $49-14z=4$，所以 $z=\dfrac{45}{14}$

『方法三』台中市居仁完全中學蔡哲平的作法

（1）設 $x+\sqrt{x^2+1}=a$ ， $y+\sqrt{y^2+4}=b$ ，則 $ab=7$

（2）$\because x+\sqrt{x^2+1}=a$ $\therefore \sqrt{x^2+1}=a-x$ $\Rightarrow x^2+1=a^2-2ax+x^2 \Rightarrow x=\dfrac{a^2-1}{2a}$

（3）$\because y+\sqrt{y^2+4}=b$ $\therefore \sqrt{y^2+4}=b-y$ $\Rightarrow y^2+4=b^2-2bx+y^2 \Rightarrow y=\dfrac{b^2-4}{2b}$

（4）$x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=x(b-y)+y(a-x)=bx+ay-2xy$

$$=b\cdot\frac{a^2-1}{2a}+a\cdot\frac{b^2-4}{2b}-2\frac{a^2-1}{2a}\cdot\frac{b^2-4}{2b}=\frac{(ab)^2-4}{2ab}=\frac{7^2-4}{2\cdot 7}=\frac{45}{14}$$

【評析】

1. 本題參與徵答的同學大部分都答對，可看出同學的代數運算能力很好。
2. 『方法一』利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，同乘 $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$，再由原式乘開，經由①式、②式得到答案。
3. 『方法三』利用變數變換，亦是數學上常用、好用的方法。
4. 本題參與徵答人數有 8 人，分數如下：

   得 7 分者，6 人：

   台中市居仁完全中學蔡哲平　台北市民生國中姚驊庭　台北市民生國中張育僑
   彰化縣陽明國中楊皓翔　基隆市銘傳國中林益平　台中市居仁國中郭昱廷

   得 2 分者，1 人：

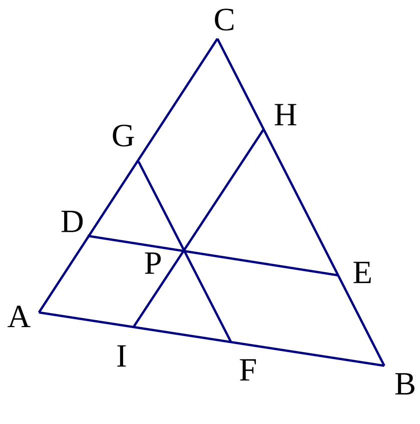
   台北縣江翠國中李承翰

   得 1 分者，1 人：

   桃園縣新興國中陳宗蔚

6605

在 ΔABC 中， $\overline{AB}=850$， $\overline{BC}=900$， $\overline{CA}=1020$，點 P 在三角形內部，$\overline{DE}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{HI}$ 都通過點 P，長度都為 d，且 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$ ，$\overline{GF}\,//\,\overline{CB}$ ，$\overline{HI}\,//\,\overline{AC}$ ，則 $d=$？



【解答】

解：$\overline{EH}=\overline{BC}-(\overline{BE}+\overline{HC})=\overline{BC}-(\overline{FP}+\overline{PG})=900-d$，

同理可得，$\overline{GD}=1020-d$，由 ΔDPG 與ΔABC 相似

得 $\overline{DP}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}\cdot\overline{GD}=\dfrac{850}{1020}(1020-d)$，再由

ΔPEH 與ΔABC 相似得 $\overline{PE}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\overline{EH}=\dfrac{850}{900}(1020-d)$，

由 $d=\overline{DP}+\overline{PE}$，將上面二式相加得，$d=\dfrac{850}{1020}(1020-d)+\dfrac{850}{900}(1020-d)$

$\Rightarrow d=612$

解題重點：

這是一個「平行三角形底邊的截線性質」的應用問題，想瞭解同學們是否能使用「平行三角形底邊的截線可截出相似三角形」的性質，或進一步使用「平行四邊形的定義」。來徵答同學中皆是用上述方法處理，尚無人用三角函數法解本題。

上面是我們提供的解法，僅供各位參考。

【評析】

本題徵答人數 17 人，其中得 7 分者有 12 人，得 6 分者有 5 人。得 7 分的同學是：台北市民生國中張育橋同學、九年 3 班黃亮鈞同學、九年 8 班姚驊庭同學、九年 9 班黃振同學；台北市東山國中劉凱勛同學；台北縣江翠國中八年 23 班黃冠傑同學、九年 2 班李承翰同學、九年 21 班廖柏穎同學；桃園新興國中八年 1 班陳宗蔚同學；台中市居仁國中八年 32 班蔡哲平同學王嘉賢與同學；台中縣光榮國中九年 29 班陳鴻祥同學。

建中數學科競賽組　范文榮