

大學入學考試中心

109 學年度指定科目考試數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 74 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 矩陣 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5$ 與下列哪一個矩陣相等？

- (1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ 。

【109 數乙】

答：(5)

解： $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5 = (-I+B)^5$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5 = C_0^5 (-I)^5 + C_1^5 (-I)^4 B = -I + 5B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 某畢業班由 8 位同學負責畢旅規劃，分成 A、B、C 三組，且三組分別由 3 人、3 人、2 人組成。8 位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這 8 位同學總共有幾種分組方式？

- (1)140 種 (2)150 種 (3)160 種 (4)170 種 (5)180 種。

【109 數乙】

答：(1)

解： $\left. \begin{array}{l} \text{甲乙在 A 組 } C_1^6 C_3^5 C_2^2 = 60 \\ \text{甲乙在 B 組 } C_3^6 C_1^3 C_2^2 = 60 \\ \text{甲乙在 C 組 } C_3^6 C_3^3 = 20 \end{array} \right\} \text{合計 140 種}$

3. 為了瞭解 IQ 和腦容量是否有關，一項小型研究利用核磁共振測量了 5 個人的腦容量（以 10,000 像素為單位），連同他們的 IQ 列表如下：

| | | | | | |
|--------|----|-----|-----|----|-----|
| 腦容量(X) | 90 | 95 | 91 | 88 | 106 |
| IQ(Y) | 90 | 100 | 112 | 80 | 103 |

已知上表中的 X 之平均值為 $\mu_X = 94$ ，Y 之平均值為 $\mu_Y = 97$ ，腦容量(X)與 IQ(Y) 的相關係數為 $r_{X,Y}$ 。根據上述表格，試判斷 $r_{X,Y}$ 的值最可能是下列哪一個選項？

- (1) $r_{X,Y} \leq -1$ (2) $-1 < r_{X,Y} < -0.5$ (3) $r_{X,Y} = 0$ (4) $0 < r_{X,Y} < 0.5$ (5) $r_{X,Y} \geq 1$ 。

【109 數乙】

答：(4)

解：

| x_i | y_i | $x_i - \mu_A$ | $y_i - \mu_B$ | $(x_i - \mu_A)^2$ | $(y_i - \mu_B)^2$ | $(x_i - \mu_A)(y_i - \mu_B)$ |
|--------------|-------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|------------------------------|
| 90 | 90 | -4 | -7 | 16 | 49 | 28 |
| 95 | 100 | 1 | 3 | 1 | 9 | 3 |
| 91 | 112 | -3 | 15 | 9 | 225 | -45 |
| 88 | 80 | -6 | -17 | 36 | 289 | 102 |
| 106 | 103 | 12 | 6 | 144 | 36 | 72 |
| $\mu_x = 94$ | | | | $\Sigma = 206$ | $\Sigma = 608$ | $\Sigma = 160$ |
| $\mu_y = 97$ | | | | | | |

$$r_{X,Y} = \frac{160}{\sqrt{206} \sqrt{608}} = 0.45 \dots \dots$$

二、多選題 (佔 24 分)

4. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x)=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

- (1) $f(0) > 0$ (2) $f(1)f(2) > 0$
 (3) 若 $f(x)-1=0$ 有實根，則 $f(x)-2=0$ 有實根
 (4) 若 $f(x)-1=0$ 有重根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根
 (5) 若 $f(x)-1=0$ 有兩相異實根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 有實根。

【109 數乙】

答：(2)(3)(4)

解：(1) 不一定

(2) $f(t), f(s) > 0$

(3) $f(x)-1=0$ 有實根，表 $y=f(x)$ 開口向上
 $\Rightarrow f(x)-2=0$ 必有實根

(4) $f(x)-1=0$ 有重根，表 $y=f(x)$ 開口向上，頂點 $(x, 1)$
 $\Rightarrow f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根

(5) 不一定，可能頂點 (x, y) ， $\frac{1}{2} < y < 1$

5. 數列 a_1, a_2, \dots 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1 = 3, a_2 = 2$ 。試選出正確的選項。

- (1) $a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ (2) $\frac{a_{10}}{a_{11}} > 10$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

- (5) $\sum_{n=1}^{100} a_n > 9$ 。

【109 數乙】

答：(2)(3)

解： $a_1 = 3, a_3 = 1, a_5 = \frac{1}{3}, a_7 = \frac{1}{9}, a_9 = \frac{1}{27}, a_{11} = \frac{1}{81}$
 $a_2 = 2, a_4 = 1, a_6 = \frac{1}{2}, a_8 = \frac{1}{4}, a_{10} = \frac{1}{8}, a_{12} = \frac{1}{16}$

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{81}} = \frac{81}{8} > 10, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{2k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \lim_{2k \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \lim_{2k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

$$\lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{3 \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}} = \lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \text{ 發散}$$

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{50} \right]}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{17}{2} - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{50} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{50} < 9$$

6. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

(一) 當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

(二) 當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。

(三) 當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標 -4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試選出正確的選項。

(1) 投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2 的機率為 $\frac{1}{2}$

(2) 投擲骰子一次，棋子的坐標之期望值為 0

(3) 投擲骰子二次，棋子的坐標有可能為 -5

(4) 投擲骰子二次，在所擲兩次之點數和為奇數的情形下，棋子的坐標為正的機率為 $\frac{4}{9}$

(5) 投擲骰子三次，棋子在原點的機率為 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 。

【109 數乙】

答：(2)(4)

$$\text{解：(1) } \underbrace{P(4 \text{ 點})}_{\text{位於+2}} + \underbrace{P(3 \text{ 點})}_{\text{位於-2}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(2) E(X) = \frac{1}{6} \left[\underbrace{1}_{\substack{\downarrow \\ \text{2點}}} + \underbrace{2}_{\substack{\downarrow \\ \text{4點}}} + \underbrace{3}_{\substack{\downarrow \\ \text{6點}}} - \underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ \text{1點}}} - \underbrace{2}_{\substack{\downarrow \\ \text{3點}}} - \underbrace{4}_{\substack{\downarrow \\ \text{5點}}} \right] = 0$$

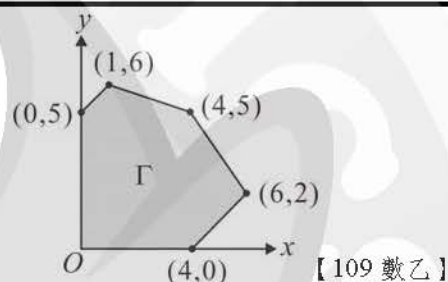
(3) 因為 -5 為奇數，故不可能

$$(4) \frac{\begin{matrix} 4 \\ \vdots \\ 1-0, \\ 2-0, \\ 3-0, 3-2 \end{matrix} \times 2!}{9 \times 2!} = \frac{4}{9}$$

$$(5) \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left[\begin{matrix} \underbrace{\frac{3!}{3!}}_{-0-0-0} + \underbrace{\frac{3!}{2!} \times 2}_{2-2-0, +1+1-2} + \underbrace{\frac{3! \times 2}{2-2-0, 1+3-4}}_{2-2-0, 1+3-4} \right] = \frac{19}{216}$$

三、選填題 (佔 32 分)

A. 坐標平面上有一個多邊形區域 Γ (含邊界), 如圖所示。
若 $k > 0$, 直線 $7x + 2y = k$ 與兩坐標軸圍成一個
三角形區域, 使得多邊形區域 Γ 落在此三角形區域
(含邊界) 內, 則最小正實數 $k =$ _____。



答: 46

解:

| | | | | | |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (x, y) | $(0, 5)$ | $(1, 6)$ | $(4, 5)$ | $(6, 2)$ | $(4, 0)$ |
| $7x + 2y = k$ | 10 | 19 | 38 | 46 | 28 |

B. 若隨機變數 X 的可能值為 1、2、3、4, 其出現的機率 $P(X = k)$ 與 $\frac{1}{k}$ 成正比,
則機率 $P(X = 3)$ 為 _____。(化為最簡分數) 【109 數乙】

答: $\frac{4}{25}$

解: $P(X = 1, 2, 3, 4) = \frac{t}{1} + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4} = 1 \Rightarrow t = \frac{12}{25}$

$$P(X = 3) = \frac{t}{3} = \frac{4}{25}$$

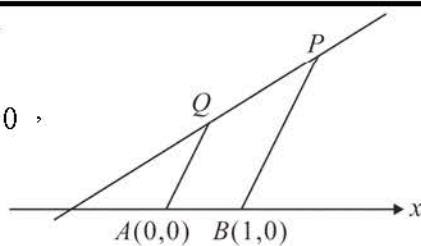
C. 一家公司僅有經理、秘書、業務三位成員, 若只有秘書加薪 10%, 則全公司薪資總支出
增加 3%; 若只有業務加薪 20%, 則全公司薪資總支出增加 4%; 如果只有經理減薪 15%
、那麼全公司薪資總支出將減少 _____ %。 【109 數乙】

答: 7.5

解:
$$\begin{cases} A + 1.1B + C = 1.03(A + B + C) \\ A + B + 1.2C = 1.04(A + B + C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7B = 3A + 3C \\ 4C = A + B \end{cases} \Rightarrow A : B : C = 5 : 3 : 2$$

$$0.85A + B + C = (1 - k)(A + B + C) \Rightarrow k = 0.75$$

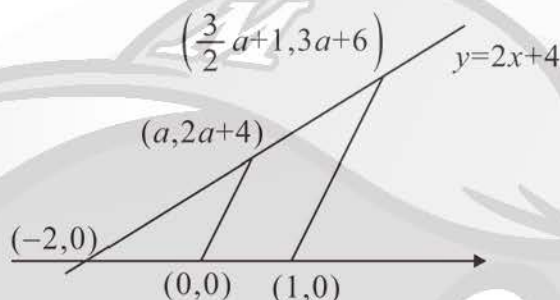
- D. 坐標平面上有一梯形，四個頂點分別為 $A(0,0)$ ， $B(1,0)$ ， P ， Q ，其中過 P ， Q 兩點的直線方程式為 $y=2x+4$ ，如圖為示意圖。若 Q 點的坐標為 $(a, 2a+4)$ ，其中實數 $a \geq 0$ ，則梯形 $ABPQ$ 的面積為_____。(化為最簡分數)



【109 數乙】

答： $\frac{5}{2}a+5$

解：



第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

- 一. 傳染病在發生初期時，由於大部分人未感染且無抗體，所以總感染人數大都以指數形式成長。在「初始感染人數為 P_0 ，且每位已感染者平均一天會傳染給 r 位未感染者」的前提下， n 天後感染到此疾病的總人數 P_n 可以表示為

$$P_n = P_0 (1+r)^n, \text{ 其中 } P_0 \geq 1 \text{ 且 } r > 0. \text{ 試回答下列問題：}$$

(1) 已知 $A = \frac{\log P_5 - \log P_2}{3}$ ， $B = \frac{\log P_8 - \log P_6}{2}$ ，試說明 $A = B$ 。(4 分)

- (2) 已知某傳染病初期符合上述數學模型且每隔 16 天總感染人數會增加為 10 倍，

試求 $\frac{P_{20}}{P_{17}} \times \frac{P_8}{P_6} \times \frac{P_5}{P_2}$ 的值。(5 分)

(3) 承(2)，試求 $\frac{\log P_{20} - \log P_{17}}{3}$ 的值。(4 分)

【109 數乙】

答：(2) $\sqrt{10}$ (3) $\frac{1}{16}$

解：(1) $A - B = \frac{2\log P_5 - 2\log 2 - 3\log P_8 + 3\log P_6}{6}$

$$= \frac{1}{6} \log \left(\frac{P_5^2 \times P_6^3}{P_2^2 P_8^3} \right) = \frac{1}{6} \log \left(\frac{P_0^2 (1+r)^{10} P_0^3 (1+r)^{18}}{P_0^2 (1+r)^4 P_0^3 (1+r)^{24}} \right) = \frac{1}{6} \log 1 = 0$$

(2) $P_{16} = P_0 (1+r)^{16} = 10P_0 \Rightarrow (1+r)^{16} = 10$

$$\text{所求} = \frac{P_0 (1+r)^{20} \times P_0 (1+r)^8 \times P_0 (1+r)^5}{P_0 (1+r)^{17} \times P_0 (1+r)^6 \times P_0 (1+r)^2} = (1+r)^8 = \sqrt{10}$$

(3) 所求 $= \frac{1}{3} \log \left(\frac{P_{20}}{P_{17}} \right) = \frac{1}{3} \log \left(\frac{P_0 (1+r)^{20}}{P_0 (1+r)^{17}} \right) = \log \left[(1+r)^3 \right]^{\frac{1}{3}}$

$$= \log(1+r) = \log 10^{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$$

二. 在坐標平面上，兩平行直線 L_1 、 L_2 的斜率都是2且距離為5，又點 $A(2, -1)$ 是 L_1 在第四象限的一點，點 B 是 L_2 在第二象限的一點且 $|\overline{AB}| = 5$ 。已知直線 L_3 的斜率為3，通過點 A 且交 L_2 於點 C ，試回答下列問題：

(1) 試求直線 AB 的斜率。(2分)

(2) 試求向量 \overrightarrow{AB} 。(4分)

(3) 試求內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值。(3分)

(4) 試求向量 \overrightarrow{AC} 。(4分)

【109 數乙】

答：斜率 $AB = -\frac{1}{2}$ ， $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$ ， $\overrightarrow{AC} = (5\sqrt{5}, 15\sqrt{5})$

解： $L_1: (y+1) = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 5$ 。故 $L_2: y = 2x + k$ ，過第二象限，故 $k > 0$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|k+5|}{\sqrt{5}} = 5 \Rightarrow k = 5\sqrt{5} - 5。故 $L_2: y = 2x + 5\sqrt{5} - 5$$$

$$B(t, 2t + 5\sqrt{5} - 5) \in \text{第二象限}, \overline{AB} = \sqrt{(t-2)^2 + (2t + 5\sqrt{5} - 4)^2} = 5 \Rightarrow t = 2 - 2\sqrt{5}$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), \text{斜率 } AB = -\frac{1}{2}$$

$$L_3: (y+1) = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x - 7, \text{與 } L_2 \text{ 交於 } C(5\sqrt{5} + 2, 15\sqrt{5} - 1)$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AC} = (5\sqrt{5}, 15\sqrt{5}), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -50 + 75 = 25$$