

國立宜蘭高級中學 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

(記憶版)

一、填充題 (每題 7 分, 共 84 分)

1. 設 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$ 是一橢圓, 焦點為 F_1 、 F_2 。若 A 、 B 為橢圓上相異兩點, F_1 在線段 AB 上, 且 $\triangle ABF_2$ 的周長為 28, 則 $k =$ _____。
2. 有一直線斜率為 2, 已知直線與 $y = \log_2 x$ 及 $y = \log_4 x$ 分別在第一象限交於 A 、 B 兩點, 若 $\overline{AB} = \sqrt{5}$, 則 A 點的 x 坐標為_____。
3. 在 $1 \sim 100$ 中, 找兩數 a, b (可以重複), 試求 $3^a + 7^b$ 個位數字是 8 的機率為_____。
4. 空間中有兩點 $A(1, 1, 1)$ 、 $B(4, -1, 7)$, 有一個點 P 在 x 軸上, 則 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值為_____。
5. 設 $f(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{2} + i(\cos x + \sin x)$, 其中 $0 \leq x < 2\pi$, 當 $x = \theta$ 時, $|f(x)|$ 有最大值 M , 試求數對 $(\theta, M) =$ _____。
6. 已知圓心在第一象限且在 $y = \frac{3}{x}$ 上, 試求出與直線 $3x + 4y + 3 = 0$ 相切的圓中, 面積最小的圓方程式_____。
7. 學生要舉辦暑期營隊, 預計要在八月的前 12 天選其中 3 天舉行例行會議, 已知第一次會議與第二次會議之間要間隔 1 日以上 (含 1 日), 第二次會議與第三次會議之間要間隔 2 日以上 (含 2 日), 試求此機率為_____。
8. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 皆為實數), 在 x_1 與 x_2 兩處有極值, $x_1 \neq x_2$ 。已知 $f(x_1) = x_1$, 試求方程式 $3[f(x)]^2 + 2af(x) + b = 0$ 的實根個數為_____。
9. 若 $f(n) = (n^2 - 2n + 1)^{\frac{1}{3}} + (n^2 - 1)^{\frac{1}{3}} + (n^2 + 2n + 1)^{\frac{1}{3}}$, 則 $\sum_{k=1}^{500} \frac{1}{f(2k-1)} =$ _____。
10. 在坐標平面上, 考慮二階方陣 $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換圖形。對於平面上異於原點 O 的點 P_1 , 設 P_1 經 A 變換成 P_2 , P_2 經 A 變換成 P_3 。假設 P_1 是圖形 $y = \frac{1}{10}x^2 - 10$ 上的動點, 試求 $\triangle P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值為_____。

11. 如圖，一個邊長為 1 單位的正四面體 $ABCD$ ，有一隻螞蟻沿著此四面體的稜邊行走，已知螞蟻從 A 點出發，且到其它三點的機率都相同，若 a_n 表示行走 n 單位的距離後回到 A 點的機率，試求 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

需補圖

12. 若 $\tan((2k-1)\theta) = \frac{a_1 \tan \theta + a_3 \tan^3 \theta + \dots + a_{2k-1} \tan^{2k-1} \theta}{a_0 + a_2 \tan^2 \theta + \dots + a_{2k-2} \tan^{2k-2} \theta}$ ，則 $\sum_{j=0}^{2k-1} |a_j| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算證明題（共 56 分）

1. （14 分）敘述以下定理，不用證明。

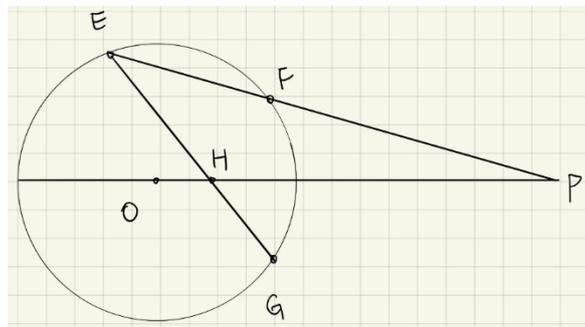
微積分基本定理（有兩個形式，各 5 分）；勘根定理（4 分）

2. （15 分）敘述（5 分）並證明（10 分）托勒密定理。

3. （17 分）設 $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ ，試求 $f(x)$ 的截距（3 分）、臨界點（3 分）、反曲點（3 分）、遞增區間（4 分）、凹口向下區間（4 分）。

4. （10 分）如圖，有一圓其圓心為 O ，半徑為 r ，另有圓外一點 P ，從圓上一點 E 作直線 PE 交圓於 F 點，在圓上作 F 的對稱點 G ，連接 \overline{EG} 交 \overline{OP} 於點 H 。

試證明 $\overline{OH} \times \overline{OP} = r^2$ 。



國立宜蘭高級中學 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題參考答案

(不負責任的答案，這張表格是自己製作，非考試當下的樣式)

一、填充題 (每題 7 分，共 84 分)

1.	2.	3.	4.
49	$8+4\sqrt{3}$	$\frac{3}{16}$	9
5.	6.	7.	8.
$(\frac{7\pi}{4}, 2\sqrt{2})$	$(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = 9$	$\frac{21}{55}$	4
9.	10.	11.	12.
5	9	$\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n + \frac{1}{4}$	2^{2k-1}

二、計算證明題 (共 56 分)

1. (14 分) 敘述以下定理，不用證明。

微積分基本定理 (有兩個形式，各 5 分)；勘根定理 (4 分)

(1) 微積分第二基本定理：

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，若 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，則 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，並在 (a, b) 可微分，
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

(2) 微積分第一基本定理：

若 $F(x)$ 與 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續， $F(x)$ 在 (a, b) 可微分，且 $F'(x) = f(x)$ ，則

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(3) 勘根定理：

$f(x) = 0$ 是一個實係數多項式方程式，而 a 與 b 是兩個相異實數。若 $f(a)f(b) < 0$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 在 a 與 b 之間至少有一實根。

2. (15分) 敘述(5分)並證明(10分)托勒密定理。

(1) 敘述：

若四邊形 $ABCD$ 是圓內接四邊形，則 $\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{BC} \times \overline{AD} + \overline{AB} \times \overline{CD}$ 。

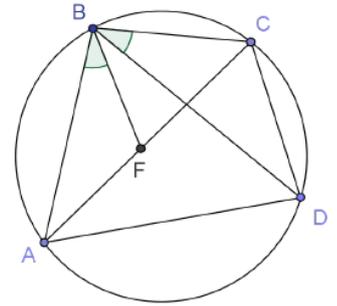
(2) 證明：

不失一般性假設 $\angle ABD \geq \angle DBC$ 。

在 \overline{AC} 上取 F 使得 $\angle ABF = \angle DBC$ ，

則有 $\triangle ABF \sim \triangle DBC$ 和 $\triangle FBC \sim \triangle ABD$ 。

由相似形邊長成比例得 $\overline{AF} \times \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{CD}$ 和 $\overline{FC} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{AD}$ ，
兩式相加即得證。



3. (17分) 設 $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ ，試求 $f(x)$ 的截距(3分)、臨界點(3分)、反曲點(3分)、遞增區間(4分)、凹口向下區間(4分)。

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5) = x^3(\sqrt{3}x + \sqrt{5})(\sqrt{3}x - \sqrt{5})$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1) = 30x(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$$

(1) 截距坐標： $(0,0), (\frac{\sqrt{15}}{3}, 0), (-\frac{\sqrt{15}}{3}, 0)$

(2) 臨界點坐標： $(0,0), (1,-2), (-1,2)$

(3) 反曲點坐標： $(0,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8})$

(4) 遞增區間： $(-\infty, -1), (1, \infty)$

(5) 凹口向下區間： $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

4. (10分) 如圖，有一圓其圓心為 O ，半徑為 r ，另有圓外一點 P ，從圓上一點 E 作直線 PE 交圓於 F 點，在圓上作 F 的對稱點 G ，連接 \overline{EG} 交 \overline{OP} 於點 H 。

試證明 $\overline{OH} \times \overline{OP} = r^2$ 。

(再麻煩大家補充)