

科目：數學科

選擇題：共 40 題，總分 100 分，每題 2.5 分。

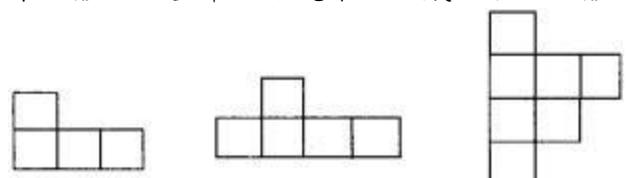
- 考慮黃金分割比 $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。定義等比數列 $a_n = \frac{\rho^n}{\sqrt{5}}$ ，其中 n 為正整數。則最接近 a_{12} 的正整數是多少？
(A) 100 (B) 121 (C) 144 (D) 169
- 一拋物線有兩點 A 、 B ，且線段 \overline{AB} 通過該拋物線的焦點 F 。若 $\overline{AF} = 12$ 、 $\overline{BF} = 4$ ，則 F 到此拋物線的準線的距離為何？
(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 9
- 四支足球隊進行單循環賽，每兩支隊伍皆對戰一場。每場比賽的勝隊得積分 3 分，敗隊得 0 分，平手則各得 1 分。由於四隊實力相當，全部賽程中共有 5 場以平手收場。請問積分最高的隊伍獲得幾分？
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9
- 若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，則 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 之值為何？
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{7}{9}$
- 在 $1^2, 2^2, \dots, 100^2$ 這 100 個平方數中，有幾個數除以 7 的餘數會等於 2？
(A) 0 (B) 14 (C) 28 (D) 42
- 黃老師騎機車到火車站接甲、乙兩位客人來學校參觀。車站到學校的距離是 6 公里，機車的時速為 45 公里，而甲、乙兩人步行的時速都是 5 公里。三人在車站會合後，黃老師先載甲朝學校方向行進一段距離，而讓乙先一人獨自走往學校。然後在途中某處，黃老師讓甲下車步行朝學校前進，並立即回頭去載乙；遇到乙後，用機車直接載乙回到學校，發現甲也同時走到學校門口。請問三人由車站回到學校，花了多少小時？
(A) $\frac{14}{45}$ (B) $\frac{32}{75}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{5}{12}$
- 設 a 、 b 是兩個正實數，且知 $\log_{10} a = 7.2$ 、 $\log_{10} b = 3.6$ 。請問 $\log_{10}(a+2b)$ 之值最接近下列哪個選項？
(A) 7.2 (B) 9 (C) 10.8 (D) 14.4
- 已知 $1105 = 5 \times 13 \times 17$ 。將 1105 寫成兩個正整數的平方和，共有幾種不同的方法？（註： $2^2 + 1^2$ 與 $1^2 + 2^2$ 視為相同）
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8
- 下列關於空間中的直線與平面的敘述，請問哪一個是正確的？
(A) 兩歪斜線同時對某一平面的正射影，會形成兩直線
(B) 三相異平面 E_1, E_2, E_3 中，若 E_1, E_2 交於一直線 L_1 、 E_1, E_3 交於直線 L_2 ，則 L_1, L_2 不為歪斜線
(C) 若兩相異平面 E_1, E_2 同時與第三平面 E_3 垂直，則 E_1, E_2 互相平行
(D) 三條相異直線 L_1, L_2, L_3 中，若 L_1, L_2 交於一點， L_2, L_3 也交於一點，則 L_1, L_3 必交於一點
- 設二次方程式 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 的兩根為 α 、 β ，則下列哪一個方程式的兩根是 $\alpha + \frac{1}{\beta}$ 、 $\beta + \frac{1}{\alpha}$ ？
(A) $6x^2 - 16x - 25 = 0$
(B) $6x^2 + 21x - 16 = 0$
(C) $3x^2 - 19x - 21 = 0$
(D) $3x^2 - 8x - 23 = 0$

11. 方程式 $13x+23y=1$ 的整數解 (x, y) 中， $|x|+|y|$ 的最小可能值為多少？
 (A) 11 (B) 25 (C) 47 (D) 61
12. 同時出現在兩等差數列 $1000, 997, 994, \dots, -50$ 以及 $-75, -68, -61, \dots, 800$ 的整數有多少個？
 (A) 39 (B) 40 (C) 41 (D) 42
13. 設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為五個非負實數，且總和為 1。請問 $a_1^2+2a_2^2+3a_3^2+4a_4^2+5a_5^2$ 的最小值為多少？
 (A) $\frac{60}{137}$ (B) $\frac{41}{60}$ (C) $\frac{12}{25}$ (D) $\frac{1}{15}$
14. 數列 a_1, a_2, a_3, \dots 依下述定義給出： $a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$ ，而 $n \geq 1$ 。給定 $a_1 = 2$ 及 $a_2 = 5$ ，則 a_{2002} 之值為多少？
 (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 2 (D) 5
15. 方程式 $x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}} = 1$ 的實數解有多少個？
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
16. 若 n 為正整數，且 $n^4 - 38n^2 + 169$ 為質數，則 $n = ?$
 (A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 10
17. 數列 $3, 6, 11, 18, 27, 38, \dots$ 依此規律，求第 100 項的值 = ?
 (A) 9801 (B) 9803 (C) 10001 (D) 10002
18. 設二次函數 $y = 6x - 1 - 3x^2$ 的最大值為 a ， $y = (x+2)^2 - 3$ 的最小值為 b ，則 $a+b = ?$
 (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -2
19. 已知坐標平面上兩直線 $2x+y=2$ 與 $x+my=1$ 互相垂直。則點 (m, m) 到直線 $x+y+3=0$ 的距離為何？
 (A) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
20. $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 中點， $\overline{BC} = 2020$ ， $\overline{AD} = 1000$ ，則 $\triangle ABC$ 必為何種三角形？
 (A) 等腰三角形 (B) 直角三角形 (C) 銳角三角形 (D) 鈍角三角形
21. 以 $\triangle ABC$ 的三中線為邊所成的三角形，其面積是 $\triangle ABC$ 面積的幾倍？
 (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
22. 已知銳角三角形 $\triangle ABC$ 三邊長互不相等， D 是 \overline{BC} 上一點，滿足 $\angle BAD + \angle C = 90^\circ$ ，那麼 \overline{AD} 必定通過 $\triangle ABC$ 的
 (A) 外心 (B) 內心 (C) 重心 (D) 垂心
23. 已知 x 是整數，且 $x^2 + x - 2$ 也是整數的平方。則這樣的 x 有多少個？
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

24. $\triangle ABC$ 中，三邊長為 3、4、6，所對應的三條高長度分別為 p 、 q 、 r 。則將 $(p+q+r)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$ 的值化為最簡分數後，分母與分子的和為？
 (A) 37 (B) 39 (C) 41 (D) 43

25. 已知 k 為正整數。若直線 $y = -2x + k$ 與兩坐標軸圍成的三角形，其內部與邊界上的格子點 (格子點為兩坐標皆為整數的點) 恰有 100 個。則 k 的值為？
 (A) 6 (B) 11 (C) 18 (D) 22

26. 某立體由一些單位方塊堆砌而成。若此立體的前視、左視、上視圖如下：



則此立體的體積為？
 (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

27. 一行星繞其太陽的軌道是一個橢圓，且太陽為一焦點。橢圓長軸的兩端點中，距離太陽近的稱為近日點，遠的稱為遠日點。已知近日點與遠日點與太陽的距離比為 1:25，則橢圓軌道的長軸與短軸的長度比為？
 (A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{12}{7}$ (D) $\frac{13}{7}$

28. 數列 a_n 定義為 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，且 $n \geq 3$ 時， $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ 。則比 a_8 小且與 a_8 互質的自然數有幾個？
 (A) 125 (B) 126 (C) 127 (D) 128

29. 有一橢圓，其兩焦點為 A 與 B ，而 P 為橢圓上的點。已知 $\triangle ABP$ 為直角三角形，且 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AP} = 6$ ，請問此橢圓的短軸長是多少？
 (A) 4 (B) $4\sqrt{3}$ (C) $8\sqrt{3}$ (D) 16

30. 凸 10 邊形，把每條對角線都連上，最多可以把此 10 邊形內部分為幾塊區域？
 (A) 256 (B) 246 (C) 200 (D) 128

31. 請問 $2020!$ 乘開後，末尾有幾個 0？
 (A) 202 (B) 400 (C) 503 (D) 2013

32. 樂透彩中的四星彩組彩，玩法是選一個 4 位數 (即從 0000 到 9999 中選一數，首位可為 0)，但不看數字的順序，只要 4 個數字相同即為中獎。例如買 2468 這個號碼，開出 4628 或 6824 都算中獎。請問四星彩組彩買 5566 這個號碼的中獎機率為何？
 (A) 0.01% (B) 0.04% (C) 0.06% (D) 0.12%

33. 某圓內接六邊形 $ABCDEF$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$ 、 $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = 2$ ，請問此六邊形的面積為何？
 (A) 13 (B) $13\sqrt{3}$ (C) $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

34. 政府為了振興經濟，發行了三倍券，民眾可以用一千元換得三倍價值實體券，也就是三千元。除了領實體券，三倍券還可以用綁定信用卡的方式來消費，綁 A 銀行信用卡的話，消費滿 3000 元，除了政府回饋的 2000 元，A 銀行會加碼回饋 400 元；而綁 B 銀行信用卡的話，只要消費超過 3000 元，不管多少，都會回饋 5%，當然還有政府回饋的 2000 元。請問購買多少元以上的東西，應該綁 B 銀行回饋較多，而以下的話應該綁 A 銀行？
- (A) 3000 元 (B) 6000 元 (C) 6400 元 (D) 8000 元

35. 汽水一瓶 15 元，為了響應環保，回收 4 個空瓶可以換一瓶新的汽水，請問打算共喝 77 瓶汽水的話，「最少」須準備多少錢即可？
- (A) 855 元 (B) 870 元 (C) 900 元 (D) 1155 元

36. 下列何者錯誤？

- (A) $\log a \times \log b = \log(a + b)$
(B) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
(C) $\log_a b^c = \log_c b^a$
(D) $\log_{10} 100 = 2$

37. 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \frac{1}{x}) \sin x$ 的值為何？

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 此極限不存在

38. 請問 $\int_{-2}^2 \frac{1}{x} dx$ 的值為何？

- (A) 0 (B) ∞ (C) $-\infty$ (D) 不存在

39. 空間中三點 $A(2, 0, 4)$ 、 $B(4, 1, -1)$ 與 $C(6, 7, 7)$ ，請問此三點構成什麼圖形？

- (A) 銳角三角形 (B) 直角三角形 (C) 鈍角三角形 (D) 一直線

40. 旅遊大亨是一款類似大富翁的手遊，每次會擲兩顆骰子，依總點數前進。假設每顆骰子擲到每一個面的機率相同，而且兩顆骰子擲到什麼點數是彼此獨立的。大衛發現再走 8 步就可以走到自己的地，因此他拿出了「單雙道具」使自己擲出的點數總和一定是偶數，請問大衛擲出 8 點的機率為何？

- (A) $\frac{5}{36}$ (B) $\frac{9}{36}$ (C) $\frac{10}{36}$ (D) $\frac{3}{21}$