

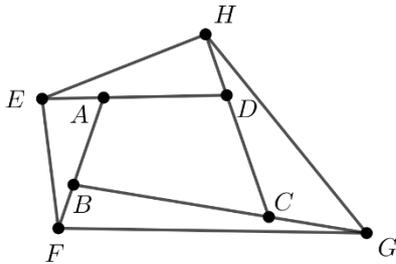
桃園市立大園國際高中 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

考試時間：100 分鐘

(記憶版)

一、填充題 (每題 5 分，共 30 分)

1. 有一個四邊形 $ABCD$ ，延伸 \overline{AB} ， \overline{BC} ， \overline{CD} ， \overline{DA} ，使得 $\overline{AB} = 2\overline{BF}$ ， $\overline{BC} = 2\overline{CG}$ ， $\overline{CD} = 2\overline{DH}$ ， $\overline{DA} = 2\overline{AE}$ ，如下圖所示：



試求四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $EFGH$ 面積的比值。

2. 由 $1, 2, 3, \dots, 20$ 挑出 x_1, x_2, x_3 三個數，且 $x_1 < x_2 < x_3$ 。若 $x_2 - x_1 \geq 3$ ， $x_3 - x_2 \geq 6$ ，則挑出三數的方法數為何？
3. 已知三正數 x, y, z 滿足
$$\begin{cases} 20(x + \frac{1}{x}) = 21(y + \frac{1}{y}) = 29(z + \frac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$
，求數組 (x, y, z) 。
4. The first terms of an arithmetic sequence are $\frac{1}{\log_2 x}, \frac{1}{\log_8 x}, \frac{1}{\log_{32} x}, \frac{1}{\log_{128} x}, \dots$. Find x if the sum of the 20 terms of the sequence is equal to 100.
5. Consider the equation $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Given that $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ and $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Find the solution to the equation for $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
6. Two unbiased tetrahedral (four-sided) dice with faces labelled 1, 2, 3, 4 are thrown and the scores recorded. Let the random variable T be the maximum of these two scores. Find the expected value of T .

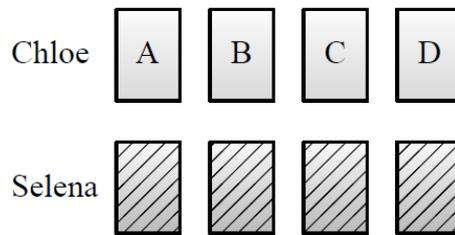
二、計算證明題（每題 10 分，共 40 分）

7. 已知 $f(x) = x^3 \int_0^2 f(x) dx - 3x^2 + 2x \int_0^2 f(x) dx - 10$ ，若 $f(x)$ 可以整理成 $a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ ，試求 a, h, p, k 之值。

8. 試求 $x^{2000} - 1$ 除以 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ 的餘式。

9. Chloe and Selena play a game where each have four cards showing capital letters A, B, C and D.

Chloe lays her cards face up on the table in order A, B, C, D as shown in the following diagram.



Selena shuffles her cards and lays them face down on the table. She then turns them over one by one to see if her card matches with Chloe's card directly above.

Chloe wins if **no** matches occur; otherwise Selena wins.

(a) Find the probability that Chloe wins the game. [5 分]

Chloe and Selena repeat their game so that they play a total of 50 times.

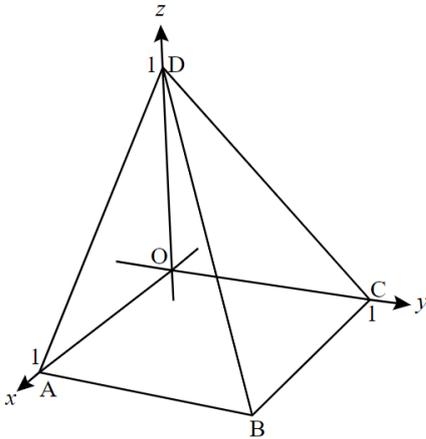
Suppose the discrete random variable X represents the number of times Chloe wins.

(b) Determine

(i) the mean of X ; [2 分]

(ii) the variance of X . [3 分]

10. The following figure shows a square based pyramid with vertices at $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$ and $D(0, 0, 1)$.



- (a) Find the Cartesian equation of the plane Π_1 ,
passing through the points A, B and D. [2 分]
- (b) Find the angle between the faces ABD and BCD. [2 分]

The plane Π_2 , passes through O and is normal to the line BD. [2 分]

- (c) Find the Cartesian equation of Π_2 . [2 分]
- Π_2 cuts AD and BD at the points P and Q respectively.
- (d) Show that P is the midpoint of AD. [2 分]
- (e) Find the area of the triangle OPQ. [2 分]

三、課程設計題（共 30 分）

設計「向量內積及正射影」的 50 分鐘教案，至少需包含 2 個課堂提問。

備註：課程設計題其實有很多說明文字，並給了大約五個面向，希望考生在設計教案時能參考這些面向去設計。並且，在說明文字結束後，附上了一面表格，列出了 108 課綱裡考生可能會用到的學習表現與學習內容的條目，如下頁所示。另外，考試時有發兩張答案卷，一張是寫填充題和計算證明題，另一張是寫課程設計題，課程設計題的答案卷請參考最後一頁。

學習表現與學習內容

(這是隨便抓的條目，不一定跟考試給的一樣)

g-IV-1	認識直角坐標的意義與構成要素，並能報讀與標示坐標點，以及計算兩個坐標點的距離。
g-IV-2	在直角坐標上能描繪與理解二元一次方程式的直線圖形，以及二元一次聯立方程式唯一解的幾何意義。
g-V-1	認識直角坐標可以用數來表示平面與空間中的位置，可以經由向量觀念而做點的運算，理解並熟練其操作，並能用於溝通。
g-V-2	理解並欣賞坐標平面上的圖形對稱性，並能用以溝通及推論。
g-V-3	認識極坐標，理解方位角、方向與斜率的關聯，能熟練地轉換表徵，並能用於溝通。
g-V-4	理解並欣賞幾何的性質可以透過坐標而轉化成數與式的關係，而數與式的代數操作也可以透過坐標產生對應的幾何意義，能熟練地轉換幾何與代數的表徵，並能用於推論及解決問題。
g-V-5	理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

編碼	學習內容條目及說明	備註	參考教具	對應學習表現
G-11A-3	空間向量：坐標空間中的向量係數積與加減，線性組合。			g-V-1
G-11A-4	三角不等式：向量的長度，三角不等式。	涵蓋實數的三角不等式，作為向量之三角不等式的特殊例。		g-V-4 n-V-4
G-11A-5	三角的和差角公式：正弦與餘弦的和差角、倍角與半角公式。	請注意連結 10 年級所學的基礎，以正弦和餘弦為主，正切之對應公式以推論之練習為原則。		s-V-1 g-V-4
G-11A-6	平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。			g-V-5
G-11A-7	空間向量的運算：正射影與內積，兩向量平行與垂直的判定、柯西不等式，外積。	可用柯西不等式解釋二維數據的相關係數範圍。※		g-V-5
G-11A-8	三階行列式：三向量決定的平行六面體體積，三重積。	以平行六面體的體積意義為重點。		g-V-5

桃園市立大園國際高中 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

(不負責任的答案，這張表格是自己製作，非考試當下的樣式)

一、填充題 (每題 5 分，共 30 分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\frac{2}{5}$	286	$(\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, 1)$	16	$\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{36}$	$\frac{25}{8}$

二、計算證明題 (每題 10 分，共 40 分)

7.	8.	9.(a)	9.(b)(i)	9.(b)(ii)
$a = 4$ $h = \frac{1}{4}$ $p = \frac{29}{4}$ $k = -\frac{65}{8}$	$-2x^3 - x^2 - 2x - 1$	$\frac{3}{8}$	$\frac{75}{4}$	$\frac{375}{32}$
10.(a)	10.(b)	10.(c)	10.(d)	10.(e)
$x + z = 1$	60° 或 120°	$x + y - z = 0$	略	$\frac{\sqrt{3}}{12}$

三、課程設計題 (共 30 分)

略

桃園市立大園國際高中 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

(這是回憶的表格，一定跟當初的答案卷有不一樣的地方)

教學單元活動設計				
單元名稱		時間		分鐘
學習表現				
學習內容				
學習目標				
教師教學活動	學生學習活動	課堂提問	學生可能遇到的困難	時間