

大學入學考試中心

108 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？
 (1)850 元 (2)875 元 (3)900 元 (4)925 元 (5)950 元。 【108 數甲】

答：(2)

解：

A	兩反	一正一反	兩正		
			兩反	一正一反	兩正
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \frac{2}{4}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$
$\$$	400	800	800 + 400	800 + 800	800 + 800

$$E(X) = \sum P\$ = 100 + 400 + 75 + 200 + 100 = 875$$

2. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數 (Fermat Number) 定義為 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ，
 例如 $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ， $F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ 。

試問 $\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？

($\log 2 \approx 0.3010$)

- (1)120 (2)240 (3)600 (4)900 (5)1200。 【108 數甲】

答：(5)

解：

$$\log \frac{F_{13}}{F_{12}} = \log \frac{2^{(2^{13})} + 1}{2^{(2^{12})} + 1} \approx \log 2^{(2^{13} - 2^{12})} = 2^{12} \times 0.3010 \approx 1232.896$$

3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A ，測得塔頂的仰角為 14° ；又在此尖塔正東方地面某點 B ，測得塔頂的仰角為 $18^\circ 30'$ ，且 A 、 B 兩點距離為 65 公尺。已知當在線段 \overline{AB} 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？
 ($\cot 14^\circ \approx 4.01$ ， $\cot 18^\circ 30' \approx 2.99$)

- (1)27 公尺 (2)29 公尺 (3)31 公尺 (4)33 公尺 (5)35 公尺。 【108 數甲】

答：(3)

解：

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= h \cot 14^\circ \approx 4.01h, \quad \overline{OB} = h \cot 18^\circ 30' \approx 2.99h \\ \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 &= \overline{AB}^2 \Rightarrow 5h \approx 65 \Rightarrow h \approx 13 \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\overline{AB} \times d}{2} \Rightarrow d = \frac{4 \times 13 \times 3 \times 13}{65} = 31.2$$

二、多選題 (佔 40 分)

4. 設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0, \frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。

- (1) Γ 的半徑大於或等於 5
- (2) 當 Γ 的半徑達到最小可能值時， Γ 通過原點
- (3) Γ 與直線 $x+2y=6$ 有交點
- (4) Γ 的圓心不可能在第四象限
- (5) 若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8。

【108 數甲】

答：(2)(5)

解：(1)(2) 最小圓以 $(7,0)$ 、 $(0, \frac{7}{2})$ 為直徑端點

$$\Rightarrow (x-7)(x) + (y)(y-\frac{7}{2}) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 7x - \frac{7}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

其中， $r = \frac{7\sqrt{5}}{4} < 5$ ，且圓過 $(0,0)$

(3) Γ 與直線 $x+2y=6$ 不一定有交點

(4)(5) 圓心在 $(7,0)$ 、 $(0, \frac{7}{2})$ 的中垂線 $2x - y = \frac{21}{4}$ 上會過第四象限，

且當圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 $d\left(\left(0, -\frac{21}{4}\right), \left(0, \frac{7}{2}\right)\right) = \frac{35}{4} > 8$

5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。

今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。

- (1) 「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
- (2) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
- (3) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
- (4) 「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
- (5) 「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率。

【108 數甲】

答：(1)(5)

解：(1) $P(R_1) = P(R_2)$ ，均為 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$(2) P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \neq \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = P(R_1) \times P(R_2)$$

$$(3) P(R_1 \cap (W_2 \cup B_2)) \neq 0$$

$$(4) P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \neq \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = P(W_1 \cap W_2)$$

$$(5) P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} < \frac{3! \times \frac{3!}{1!2!}}{6!} = \frac{3}{10} = P(\text{前三球顏色相異})$$

6. 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n ， $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，試選出正確的選項。

- (1) 對所有的正整數 n ， $a_n > 3$ 均成立
 (2) 存在正整數，使得 $a_{n+1} > 4$
 (3) 對所有的正整數 n ， $b_n^2 < b_{n+1}^2$ 均成立
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 4$
 (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ 。

【108 數甲】

答：(3)(4)

解：(1) 錯，因 $\langle a_n \rangle$ 為嚴格遞增數列，所以無此必然

(2) 錯，因 $\langle a_n \rangle$ 為嚴格遞增數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$

(3) 對， $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 且 $a_{n+1} < b_{n+1}^2 < a_{n+2}$

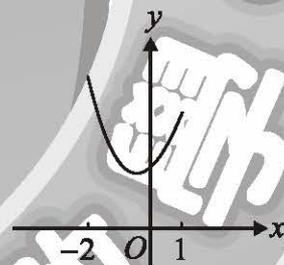
(4) 對，夾擠定理

(5) 錯

7. 已知三次實係數多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ ，在 $-2 \leq x \leq 1$ 範圍內的圖形如示意圖，試選出正確的選項：

- (1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有三實根
 (5) $y = f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正。

【108 數甲】



答：(2)(3)(5)

解：(1) $a < 0$ 時，圖形合於條件 (4) 應僅一實根

8. 坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A 、 B 、 C 滿足 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，其中 A 點的坐標為 $(1, 0)$ ，試選出正確的選項：

- (1) 向量 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ 的長度為 4 (2) 內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$
 (3) $\angle BOC$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小
 (4) $\overline{AB} > \frac{3}{2}$ (5) $3\sin \angle AOB = 4\sin \angle AOC$ 。

【108 數甲】

答：(1)(5)

解：(1) $|2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}|^2 = |-4\overrightarrow{OC}|^2 \Rightarrow |2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = 4$

$$(2) |2\vec{OA} + 3\vec{OB}|^2 = |-4\vec{OC}|^2 \Rightarrow 4 + 12\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 9 = 16 \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{4}$$

$$(3) |3\vec{OB} + 4\vec{OC}|^2 = |-2\vec{OA}|^2 \Rightarrow 9 + 24\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 16 = 4 \Rightarrow \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \frac{-7}{8}$$

$$|2\vec{OA} + 4\vec{OC}|^2 = |-3\vec{OB}|^2 \Rightarrow 4 + 16\vec{OA} \cdot \vec{OC} + 16 = 9 \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{-11}{16}$$

故 $\angle BOC > \angle AOC > \angle AOB$

$$(4) |\vec{AB}|^2 = |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}, \quad |\vec{AB}| = \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$$

$$(5) \cos \angle AOB = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos \angle AOC = \frac{-11}{16} \Rightarrow \sin \angle AOC = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

故 $3\sin \angle AOB = 4\sin \angle AOC$

三、選填題 (佔 18 分)

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，

其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標， $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標，若舊坐標為 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換

得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，則 $(r, s) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【108 數甲】

答：(3, -1)

$$\text{解：} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

B. 在坐標平面上， $A(a, r)$ 、 $B(b, s)$ 為函數圖形 $y = \log_2 x$ 上之兩點，其中 $a < b$ 。

已知 A 、 B 連線的斜率等於 2，且線段 \overline{AB} 的長度為 $\sqrt{5}$ ，則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(化成最簡分數) 【108 數甲】

答： $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$\text{解：} A(a, r) \xrightarrow{m_{AB}=2, AB=\sqrt{5}} B(a+1, r+2) = (b, 5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \log_2 a \\ r+2 = \log_2 (a+1) \end{cases} \Rightarrow 2 = \log_2 \frac{a+1}{a} \Rightarrow \frac{a+1}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

C. 設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為

z 、 0 、 $z+5-2\sqrt{3}i$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)，則 z 的實部為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化成最簡分數)

【108 數甲】

答： $-\frac{7}{2}$

解： $z \times (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = z + 5 - 2\sqrt{3}i \Rightarrow \left(\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z = 5 - 2\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow z = \frac{5 - 2\sqrt{3}i}{\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一. 坐標空間中以 O 表示原點，給定兩向量 $\vec{OA} = (1, \sqrt{2}, 1)$ 、 $\vec{OB} = (2, 0, 0)$ 。
試回答下列問題。

- (1) 若 \vec{OP} 是長度為 2 的向量，且與 \vec{OA} 之夾角為 60° ，
試求向量 \vec{OA} 與 \vec{OP} 的內積。(2 分)
- (2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 P 均落在一直線 E 上，
試求平面 E 的方程式。(2 分)
- (3) 若 \vec{OQ} 是長度為 2 的向量，分別與 \vec{OA} 、 \vec{OB} 之夾角皆為 60° ，已知滿足此條件的所有點 Q 均落在一直線 L 上，試求直線 L 的方向向量。(4 分)
- (4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 Q 點之坐標。(4 分)

【108 數甲】

答：(1) 2 (2) $x + \sqrt{2}y + z = 2$ (3) $(0, 1, -\sqrt{2})$ (4) $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{3} \right)$ 、 $(1, \sqrt{2}, -1)$

解：(1) $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$

(2) $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = (1, \sqrt{2}, 1) \cdot (x, y, z) = 2 \Rightarrow x + \sqrt{2}y + z = 2$

(3)(4) $\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{OQ} = (1, \sqrt{2}, 1) \cdot (x, y, z) = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ \\ \vec{OB} \cdot \vec{OQ} = (2, 0, 0) \cdot (x, y, z) = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow Q \in L: \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 2 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow Q \in L: \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{2}y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q \in L: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 - \sqrt{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

又 \vec{OQ} 是長度為 2 的向量，故 $\sqrt{1^2 + t^2 + (1 - \sqrt{2}t)^2} = 2 \Rightarrow t = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 、 $\sqrt{2}$

則 Q 點之坐標 $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{3} \right)$ 、 $(1, \sqrt{2}, -1)$

二. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + \int_1^x f(t)dt$ 對 $x \geq 1$
恆成立。試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$ 。(2 分)

(2) 試求 $f'(x)$ 。(4 分)

(3) 試求 $f(x)$ 。(2 分)

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx = 1$ 。(4 分)

【108 數甲】

答：(1) 2 (2) $f'(x) = 12x^2 - 6x + 2$ (3) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

解：(1) $1 \times f(1) = 3 - 2 + 1 + 0 \Rightarrow f(1) = 2$

$$(2) f(x) + xf'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x + f(x) \\ \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 6x + 2$$

$$(3) f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + k \xrightarrow{f(1)=2} k = -1$$

$$(4) \int_0^a f(x) = \left[x^4 - x^3 + x^2 - x + C \right]_0^a = a^4 - a^3 + a^2 - a = 1$$

$$\text{令 } f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x-1)(x^2+1)$$

故知僅有一大於 1 的正實數，與一小於 0 的負實數

可使 $y = x^4 - x^3 + x^2 - x$ 圖形與 $y = 1$ 有交點