

高雄市 108 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

計算題：請寫下完整的計算過程，否則不予計分。

1~12 題每題 7 分，13~14 題每題 8 分。

1. 求  $\int_{-1}^1 (x+2)|x^2 - 2x - 2| dx = ?$

2. 某一個超級細菌 1 分鐘以後會死亡或維持 1 個以及分裂成 2 個；若 1 分鐘後死亡機率為  $\frac{1}{6}$ 、維持 1 個的機率為  $\frac{1}{3}$ ，請問 3 分鐘後細菌變成 6 個的機率為？

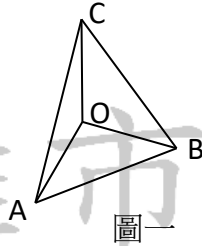
3. 有 5 隻天鵝和 7 隻鴨子在湖邊漫步，很有規律地一一排隊下水，觀察發現進入湖中游泳的天鵝數目永遠少於進入湖中游泳的鴨子數目，舉例排隊下水方式如：鴨子→鴨子→鴨子→鴨子→天鵝→天鵝→鴨子→天鵝→鴨子→天鵝→鴨子→天鵝，請問總共有幾種下水方式？

4. 試證明：對於所有大於 1 之自然數，命題  $2^n > 1 + n \cdot \sqrt{2^{n-1}}$  恆成立。

5. 設  $t, s$  皆為實數，已知方程式  $x^2 + tx + s = 0$  有兩實根為  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha^2 + \beta^2 < 2$ ，若滿足如此條件的所有數對  $(s, t)$  在  $xy$  平面上的圖形為  $T$ ，則  $T$  繞  $x$  軸旋轉一圈所得旋轉體的體積為？

6. 如圖一所示，在四面體  $OABC$  中， $\overline{OC}$  垂直  $\overline{OA}$ ， $\overline{OC}$  垂直  $\overline{OB}$ ， $\angle AOB=120^\circ$ ，且  $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$ 。

- (1) 設  $P$  為  $\overline{AC}$  中點，若  $\overline{AB}$  上存在一點  $Q$ ，使得  $\overline{PQ}$  垂直  $\overline{OA}$ ，試求此時  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$  之值。
- (2) 若平面  $ABC$  與平面  $OAC$  之銳夾角為  $\theta$ ，試求  $\cos \theta$  之值。



7. 若數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1=1$  且  $a_{n+1}=\frac{1}{6}(7a_n-18)(a_n-1)$ ，其中  $n \geq 1$ 。設  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$  之

值為何？

8. 已知  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  為  $1, 2, 3, 4, 5$  的排列，在  $a_4, a_5$  為偶數的條件下，滿足  $a_1 > a_2 < a_3$  且  $a_4 < a_5$  的機率為？

9. 復仇者聯盟的美國隊長和鋼鐵人在一次保護地球的戰役中，連續  $n$  天共消滅了全部  $m$  隻入侵地球的外星怪獸 ( $m, n \in N$ )。

第 1 天美國隊長消滅 1 隻後，鋼鐵人消滅餘下  $(m-1)$  隻的  $\frac{1}{9}$

第 2 天美國隊長消滅 2 隻後，鋼鐵人消滅餘下的  $\frac{1}{9}$ ，.....

第  $(n-1)$  天美國隊長消滅  $(n-1)$  隻後，鋼鐵人消滅了餘下的  $\frac{1}{9}$ ，之後，鋼鐵人由於能量耗盡，壯烈犧牲。第  $n$  天美國隊長消滅了最後的  $n$  隻怪獸。

試問這場戰役持續了幾天？共消滅了幾隻外星怪獸？

10. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{2k-1} = ?$

11. 試求  $x^2+1+\sqrt{x^4-8x+8}$  的極小值=?

12. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \cdots \times \frac{n+n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$  之值。

13. 一直線  $L$  與拋物線  $y^2=8x$  交於  $A$ 、 $B$  兩點，且直線  $L$  與拋物線所圍成之面積為定值  $\frac{2}{3}$ ，則  $A$ 、 $B$  中點所形成之軌跡方程式為何？

14. 已知  $\theta$  為銳角且  $\frac{16}{\sin^6 \theta} + \frac{81}{\cos^6 \theta} = 625$ ，求  $\tan \theta$  之值。

高雄市108學年度

高級中等學校

聯合教師甄選