

## 臺北市立麗山高級中學 108 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

(作答時間 100 分鐘)

(請於答案欄內作答，否則不予計分)

## 一、填充題(每格 4 分，共 72 分)

- 在五座自然島嶼之間建造四座橋，讓它們能夠連通，請問有幾種建橋方案？ ① 種
- 除了 3 個點以外，曲線  $\Gamma: y = x^6 - 10x^5 + 29x^4 - 4x^3 + ax^2$  的圖形都在直線  $L: y = bx + c$  的上方，而在這 3 個點處曲線  $\Gamma$  與直線  $L$  都相切。試求這 3 個點的  $x$  坐標總和為何？ ②
- 設函數  $f(x) = \frac{6\log_{\sqrt{2}} x - 8}{1 + 4(\log_2 x)^2}$ ，在  $x = a$  時有最大值，試求  $a = ?$  ③
- 從集合  $\{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{25}\}$  中任意選取兩個相異的數  $a$  與  $b$ 。試問  $\log_a b$  為整數的機率？ ④
- 設  $n$  為自然數， $f(x) = \sum_{k=1}^{2n} |x - 3^k|$ ，求  $f(x)$  的最小值為何？ ⑤
- 圓內接四邊形  $ABCD$  中， $O$  為圓心， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 75^\circ$ ， $\angle BDC = 45^\circ$ ， $\overrightarrow{BD} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ ，試求數對  $(a, b) = ?$  ⑥
- 已知橢圓  $\Gamma: 9x^2 + 4y^2 = 36$ ，直線  $L: 3x + 4y = 24$ 。橢圓上的一點  $P$  到直線  $L$  有最大距離時， $P$  點坐標為 ⑦。
- 投擲一個六面分別為 1, 1, 1, 2, 2, 3 的公正骰子  $n$  次，設  $P_n$  表示  $n$  次的點數和為偶數的機率，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$  ⑧。
- 求級數  $\sum_{n=1}^{2017} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} =$  ⑨
- 過點  $(p, 4)$  對曲線  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  作切線，若僅能作一條切線，則  $p$  的範圍為何？ ⑩
- $x, y$  為實數且  $x > y$ ，若  $x + y = x^2 + y^2$ ，則當  $x + y = n$  時， $x^4 - y^4$  有最大值  $M$ ，求數對  $(n, M) =$  ⑪
- 在  $xy$  平面上，設  $A(\frac{1}{2}, 0)$ ， $O$  為原點，將  $\overline{OA}$  分成  $n$  等分，過其分割點  $B_k(\frac{k}{2n}, 0)$  做  $x$  軸的垂線，與圓  $x^2 + y^2 = 1$  交在第一象限的點為  $P_k(\frac{k}{2n}, \sqrt{1 - \frac{k^2}{4n^2}})$ ，則極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{k^2}{4n^2}} = ?$  ⑫

## 臺北市立麗山高級中學 108 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

13. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為  $x^2 - x + 1 = 0$  之兩根，若  $\alpha + \beta = \alpha^n + \beta^n$ ，其中  $n$  為自然數且  $1 \leq n \leq 100$ ，求滿足上式的

自然數  $n$  有幾個？ 13 個。

14. 在空間坐標中， $A(1, -1, 2)$ ， $B(1, 1, 0)$ ， $C(1, 0, 4)$ ， $P$  為平面  $E: x + y + z = 0$  上的動點，則

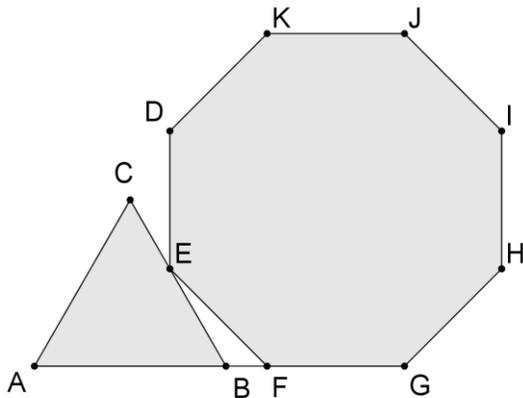
$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$  之最小值為 14。

15. 求最大的整數  $n$  使得  $\frac{n^3 + 108}{n + 11}$  也是整數， $n =$  15。

16. 求定積分  $\int_1^7 (-2 + \sqrt{-x^2 + 6x + 7}) dx$  之值為 16。

17. 下圖中已知  $\triangle ABC$  為正三角形， $DEFGHIJK$  為正八邊形，且  $E$  為  $\overline{BC}$  上一點， $\overline{CE} = 2$ ， $A, C, D$

三點共線， $A, B, F, G$  四點共線，則  $\overline{AF} =$  17。



18. 若等腰三角形的外接圓半徑  $R$  與內切圓半徑  $r$  之比值  $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$ ，且頂角  $\phi$  不為直角，

則  $\sin \frac{\phi}{2} =$  18。

## 二、計算題(每題 8 分，共 16 分)(必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分)

A. 在正方體  $ABCD - EFGH$  的內部有一點  $P$ ，若  $\overline{PA} = \sqrt{2}$ ， $\overline{PB} = \overline{PD} = \sqrt{3}$ ， $\overline{PE} = 1$ ，則正方體  $ABCD - EFGH$  的體積為何？

B. 設  $f, g$  皆為可微分函數，且  $f(x + 2y) = f(x) + g(y)$ ， $x, y \in \mathbb{R}$ ，

(1) 證明： $f'(x)$  為定值。(4 分)

(2) 若  $f(0) = 1$ ， $f'(0) = 2$ ，求  $g(5) = ?$  (4 分)

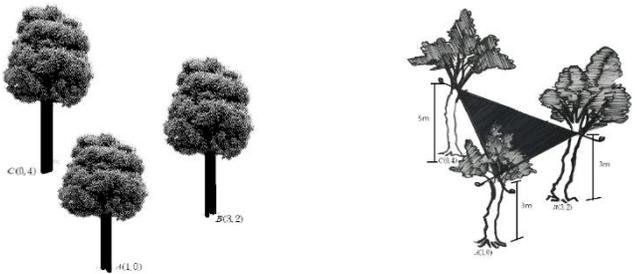
## 臺北市立麗山高級中學 108 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

## 三、素養導向試題設計(一大題，共 12 分)

大考中心揭示：數學素養導向試題的核心概念是在演算、推理、解題之外，應能以數學觀念，運用數學符號進行邏輯思考，處理真實世界的問題，並用以呈現關係，表示問題內涵等。

請由高中課程選取某一特定主題，設計一道素養導向試題(不需考慮數值是否方便計算)

範例：(參考用)

純數學知識試題 (a)	素養導向試題 (b)
<p>坐標空間中有一平面 <math>E</math> 過 <math>A(1,0,3)</math>, <math>B(3,2,3)</math> 及 <math>C(0,4,5)</math> 三點。試選出正確的選項。</p> <p>(1) <math>\triangle ABC</math> 的面積為 <math>2\sqrt{33}</math></p> <p>(2) 向量 <math>(2, -2, 5)</math> 與平面 <math>E</math> 垂直</p> <p>(3) <math>A, B</math> 及 <math>C</math> 三點在 <math>xy</math> 平面上的投影分別為 <math>A', B'</math> 及 <math>C'</math>，<math>\triangle A'B'C'</math> 的面積為 5</p> <p>(4) 平面 <math>E</math> 與 <math>xy</math> 平面的交角 <math>\theta</math>，<math>\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}</math></p> <p>(5) <math>\triangle ABC</math> 與 <math>\triangle A'B'C'</math> 的重心分別為 <math>G</math> 與 <math>G'</math>，線段 <math>\overline{GG'} = 11</math></p>	<p>在市郊步道，為了給登山民眾一個遮陽消暑的亭子。規劃利用森林木棧步道旁的三棵樹，建造一個三角形的樹亭，為了讓三棵樹木得以保存，碰到樹木就會做簍空設計。現有一個三角形的樹亭，其三頂點恰好位於三棵樹的樹幹。為計算建造樹亭所需材料，需先求樹亭屋頂的面積大小。將此三頂點投影到地面上，若將地面定為 <math>xy</math> 平面，則三個投影點在 <math>xy</math> 平面的坐標分別為 <math>A(1,0)</math>、<math>B(3,2)</math>、<math>C(0,4)</math>。</p> <p>(下圖為示意圖)</p>  <p>6-1. 求此三角形 <math>ABC</math> 的面積？</p> <p>6-2. 若樹亭三頂點的高度分別為 3, 3, 5 (如下圖)，求樹亭屋頂的面積？</p> <p>6-3. 承上題，若定義地面上方為 <math>z</math> 軸正向，求三角樹亭屋頂所在的平面方程式？</p> <p>6-4. 承上題，假設斜屋頂與水平面的夾角為 <math>\theta</math>，且坡度 <math>\tan \theta</math> 須大於 <math>\frac{1}{3}</math> 才符合標準。試問此三角樹亭屋頂設計是否符合標準？</p>