

國立台灣師範大學數學系

107 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題（共兩頁），合計100分。
- (乙) 作答時間120分鐘（下午1：20~3：20）。
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

一、 設 $f(x)$ 是最高次項係數為 2 的實係數三次多項式函數， $g(x)$ 是實係數二次多項式函數，且滿足 $f(1) = g(1), f(2) = g(2), f(3) = g(3)$ 。

(1) 試求 $f(0) - g(0)$ 之值。 (10 分)

(2) 已知 $3f(2) - 3f(1) = f(3)$ ，試求 $f(0)$ 之值。 (10 分)

二、 已知集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$ 的子集合共有 2^{2018} 個。試求：

(1) S 的子集合中，包含 1, 2, 3, 4, 5 中至少三個數的集合有多少個？(10 分)

(2) S 的子集合中，元素和是奇數的集合有多少個？ (10 分)

三、 (1) 設 A, B, C, D 為空間中相異四點，且 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d$ 。

試求內積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 。(以 a, b, c, d 的數學式表示)。(10 分)

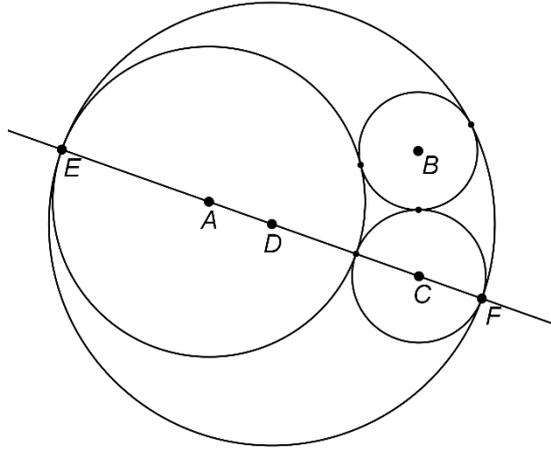
(2) 設四角錐 $A-BCDE$ 的底面 $BCDE$ 為平行四邊形， O 為 \overline{BD} 與 \overline{CE} 的交點。試證： \overrightarrow{AO} 與 $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ 垂直的充要條件為 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$ 。

(10 分)

四、 如圖，平面上四個圓：圓 A 、圓 B 、圓 C 、圓 D ，它們兩兩相切，且 \overline{EF} 通過圓 A 、圓 C 、圓 D 的圓心 A 、 C 、 D 三點。已知圓 A 、圓 B 、圓 C 的半徑分別為 a 、 b 、 c 。

(1) 試求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 的面積。(以 a, b, c 的數學式表示) (10 分)

(2) 試證：點 B 到直線 EF 的距離等於 $2b$ 。(10 分)



五、 設 $A_1A_2 \cdots A_{107}$ 為某單位圓的內接正 107 邊形，且 P 為該單位圓上任意一點。

(1) 試求 $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \times \cdots \times \overline{A_1A_{107}}$ 之值。(10 分)

(2) 試求 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \cdots \times \overline{PA_{107}}$ 的最大值。(10 分)