

2017 "希望杯" 數學邀請賽 【初試】

請不要翻到次頁！

閱讀完本頁作答說明，並聽從監試委員的指示再開始作答！

測驗說明

題本採雙面印刷，題目共 25 題，每題都只有一個正確或最佳的答案。測驗時間從 9:00 到 10:30，共 90 分鐘。作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

注意事項

1. 可利用題本中空白部份計算，切勿在答案卡上計算。
2. 答案卡上不得做任何記號。答案卡若汙損或損壞，本測驗不予計分。
3. 開始作答前，請先填寫答案卡上方個人資料，並畫記參加年級及准考序號，再開始作答。若未填寫或畫記清楚者，不予計分。

作答方式

請依照題意解出答案，並用 2B 鉛筆在答案卡上相應的位置畫記，請務必將選項塗黑、塗滿。如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，重新塗黑答案。

例如答案為 5，則將 [5] 塗黑、塗滿，即：[1][2][3][4]■[6][7][8][9][0]

1. 手寫欄的部分用原子筆或鋼筆填寫。
2. 請用 HB 或 2B 鉛筆畫記清楚年級和准考序號欄位 []，再開始作答。
3. 畫線要粗黑、清晰、塗滿格不可出格，用橡皮擦拭要清潔，若畫線過輕或汙損不清使機器無法識別，由考生自行負責。

正確：■ 錯誤：[✓] [∨] [×] [⊥] [≡]

範例：

題 1. 計算： $21.49 + 52.37 - 0.4 + 5.51 - 11.37 - 5.6 =$ ① ② 。

計算答案為 62

則①塗滿 [6]，②塗滿 [2]，如下圖

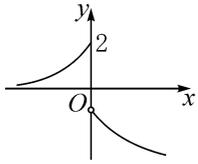
答題欄	
①	[1][2][3][4][5]■[7][8][9][0][-[±]
②	[1]■[3][4][5][6][7][8][9][0][-[±]
③	[1][2][3][4][5][6][7][8][9][0][-[±]
④	[1][2][3][4][5][6][7][8][9][0][-[±]
⑤	[1][2][3][4][5][6][7][8][9][0][-[±]

若本試卷標示①~④⑧，則需依序畫記 48 個
每① [1][2][3][4][5][6][7][8][9][0][-[±]
僅需畫記一格，切勿重複畫記。

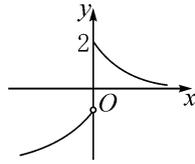
一、選擇題（以下每題的四個選項中，僅有一個是正確的。請將表示正確的答案劃在答案卡上。）

1. 若函數 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 1, \end{cases}$ 則函數 $y = f(2-x)$ 的圖像應為

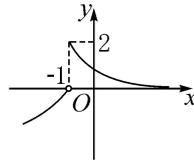
(1)



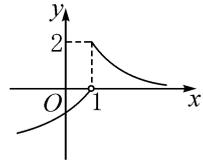
(2)



(3)



(4)



2. Given that $\{a_n\}$ is an arithmetic (equal difference) sequence, if $a_1 = 10$, and $a_{1009} = -40$, then the value of a_{2017} is

(1) -90

(2) -70

(3) 70

(4) 90

3. If the value range of $f(x) = \log(ax^2 + 3x + 2)$ is all real number, then the value range of a is

(1) $[0, \frac{9}{8})$

(2) $[0, \frac{9}{8}]$

(3) $(\frac{9}{8}, +\infty)$

(4) $[\frac{9}{8}, +\infty)$

4. 將拋物線 $y = 2x^2$ 分別向右平移 a 個單位，可使拋物線與直線 $y = x - 1$ 恰好有一個交點，則 $a =$

(1) $-\frac{7}{8}$

(2) $-\frac{8}{7}$

(3) $\frac{7}{8}$

(4) $\frac{8}{7}$

5. 若 $\sqrt{4032-a} + \sqrt{2016-a} = 63$ ，則 $\sqrt{4032-a} - \sqrt{2016-a} =$

(1) 30

(2) 31

(3) 32

(4) 33

6. 方程式 $2 \times 3^x + 5^x = 7^x$ 有多少個不同的實根？

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 3

7. Rt $\triangle ABC$ 中， $AC=3$ ， $BC=4$ ，在斜邊 AB 上依次取點列 A_1, A_2, A_3, \dots ，過每個點 A_n 作垂直於 BC 的線段交 BC 於 C_n ，使 $\triangle A_1CC_1, \triangle A_2C_1C_2, \triangle A_3C_2C_3, \dots$ 都是等腰直角三角形，則這些三角形的面積構成的等比數列的公比是

(1) $\frac{9}{49}$

(2) $\frac{16}{49}$

(3) $\frac{3}{7}$

(4) $\frac{4}{7}$

8. 如果 $2^x = 8^{y+1}, 9^y = 3^{x-9}$ ，那麼 $x + y =$

(1) 30

(2) 27

(3) 24

(4) 21

9. 盒子中有 4 個白球，3 個黑球，從中隨機取出兩個球，則取出的兩球顏色相同的機率是

(1) $\frac{2}{7}$

(2) $\frac{3}{7}$

(3) $\frac{4}{7}$

(4) $\frac{5}{14}$

10. 已知 12, 14, 37, 65 是方程 $ab - ac + bd = 182$ 的一組整數解，則 $ab - cd$ 的值等於

(1) -466

(2) -262

(3) 2016

(4) 2237

二、選填題

11. 方程式 $n(\sqrt{2})^{n-1} = 20$ 的整數解是 ⑪。

12. 若不等式 $|x-m| < 1$ 成立的充分不必要條件是 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ ，則實數 m 的取值範圍是

$$\frac{\textcircled{12}\textcircled{13}}{\textcircled{14}} \leq m \leq \frac{\textcircled{15}}{\textcircled{16}}。$$

13. 已知 $f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，若 $f(n) < a - 2016$ 對任意 n 恆成立，則整數 a 的最小值是

$$\underline{\textcircled{17}\textcircled{18}\textcircled{19}\textcircled{20}}。$$

14. 在直角坐標平面 xOy 中，已知點 $M(0,1)$ ， $N(2,3)$ ，拋物線 $y = x^2 + ax + 1$ 與線段 MN 有兩個不同的交點，則 a 的取值範圍是 ⑳㉑㉒ ≤ a ≤ ㉓。

15. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 滿足 $7a_5 + 5a_9 = 0$ ，且 $a_9 > a_5$ 。則當數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和取得最小值時，
 $n = \underline{\textcircled{24}}$ 。

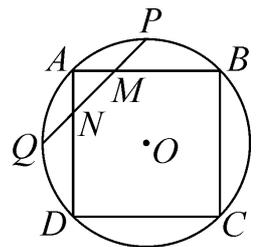
16. 當 $a \in [-1,1]$ 時， $f(x) = x^2 + (a-4)x + 4 - 2a \geq 0$ 恆成立，則 x 的取值範圍是
 $x \leq \textcircled{25}$ 或 $x = \textcircled{26}$ 或 $x \geq \textcircled{27}$ 。

17. 若 $3a - 1 = 7^{\log 20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log 0.7}$ ，則 $a = \underline{\textcircled{28}}$ 。

18. 已知 $\{a_n\}$ 是等差數列，其前 n 項的和為 S_n 。若 $a_1 = 6$ ， $a_3 + a_5 = 0$ ，則 $S_6 = \underline{\textcircled{29}}$ 。

19. As shown in Fig, quadrilateral $ABCD$ is inscribed square of circle O , the point P is the midpoint of \widehat{AB} , the point Q is the midpoint of \widehat{AD} , PQ intersects AB and AD at M and N respectively, then the value of $\frac{PM}{MQ}$ is $\sqrt{\textcircled{30}} - \textcircled{31}$ 。

(英漢小詞典：inscribed square：內接正方形)



20. 若大於 1 的實數 a, b, c 滿足 $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 ab$ ， $\log_2 a \cdot \log_2 b \cdot \log_2 c = \log_2 abc$ ，設 c 的最大值是 $x^{\frac{y}{z}}$ ，則 $x = \underline{\textcircled{32}}$ ， $y = \underline{\textcircled{33}}$ ， $z = \underline{\textcircled{34}}$ 。

21. 已知數列 $\{a_n\}$ 的通項公式是 $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ ，若 $b_n = 2(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1)$ ，則 $b_3 = \underline{\frac{\textcircled{35}\textcircled{36}}{\textcircled{37}}}$ ；

$$b_n = \underline{\frac{(\textcircled{38}\textcircled{39})^n \cdot \frac{n+\textcircled{40}}{n+\textcircled{41}}}{}}$$

22. 已知數列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 滿足 $b_n = na_n$ ，若數列 $\{b_n\}$ 的前 n 項和 $S_n = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{2n+3}{3^n}\right)$ ，

則 $a_2 = \frac{\textcircled{42}}{\textcircled{43}}$ ，數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和是 $\frac{\textcircled{44}}{\textcircled{45}} - \frac{\textcircled{46}}{\textcircled{47} \times 3^n}$ 。

23. 設不等式 $|x-a| < 2$ 的解集為 $(0, 4)$ ，則 $a = \textcircled{48}$ ；函數 $f(x) = 2|x+a| + 3|ax-1|$ 的最小值是 $\textcircled{49}$ 。

24. 已知函數 $f(x) = -x|x|$ ，則函數 $f(x)$ 是 $\textcircled{50}$ 函數

(答案為“奇”或“偶”；若答案為“奇”，請填1；若答案為“偶”，請填2)；

若 $x_1 + x_2 > 0$ ， $x_2 + x_3 > 0$ ， $x_3 + x_1 > 0$ ，則 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的取值範圍是 $(-\infty, \textcircled{51})$ 。

25. 函數 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$ 在 $x \in [-1, 3]$ 上的最小值是 $\textcircled{52}\textcircled{53}$ ；最大值是 $\textcircled{54}\textcircled{55}$ 。