

數學一試題

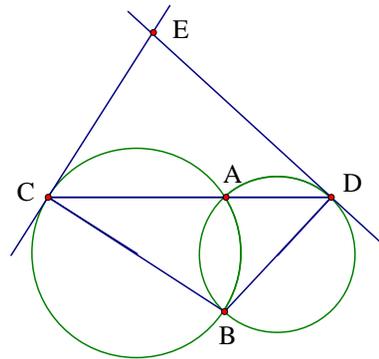
一、填充題：(每格 5 分，共 80 分。)

1. 已知 $a_1=101$ ， $a_2=1001$ ， $a_3=10001$ ， \dots ， $a_n=\underbrace{10\dots01}_{n\text{個}}$ 。若 $(a_k)^3$ 是 2020 位數，求正整數 k 的值 = (1)。

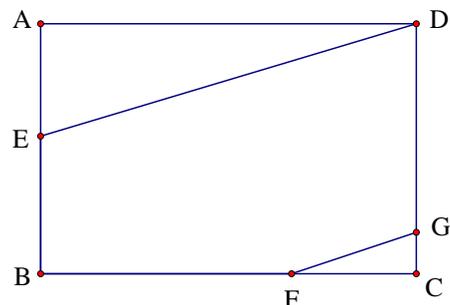
2. 已知圓周率 π 的近似值為 3.1416。設 $a=\pi^{-19}-\pi^{-20}$ ， $b=\pi^{-20}-\pi^{-21}$ ， $c=\frac{\pi^{-19}-\pi^{-21}}{2}$ ，
試將 a 、 b 、 c 三數由大排到小，答：(2)。

3. 求 $95^2-91^2+87^2-83^2+79^2-75^2+\dots+(-1)^{k+1}\times(99-4k)^2+\dots+23^2-19^2$ 的值 = (3)。

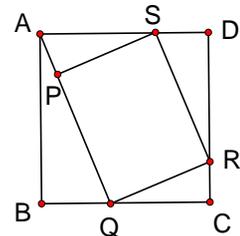
4. 如右圖，兩圓交於 A 、 B 兩點，過 A 作一直線分別交兩圓於 C 、 D 兩點，分別自 C 、 D 兩點作圓的切線，使兩切線交於 E 點，若 $\angle ACB=34^\circ$ ， $\angle CED=80^\circ$ ，求： $\angle ADB=$ (4) 度。



5. 如右圖， $ABCD$ 為長方形， E 點在 \overline{AB} 上， F 點在 \overline{BC} 上， G 點在 \overline{CD} 上，若 $\overline{CF}=3$ ， $\overline{CG}=1$ ， $\overline{DG}=5$ ， $\overline{BF}=2\overline{BE}$ ，且 $\overline{DE}\parallel\overline{FG}$ ，
求： $\overline{BE}=$ (5)。



6. 如右圖所示， $ABCD$ 是正方形， $PQRS$ 是長方形，且 $\triangle APS$ 的面積為 30， $\triangle CQR$ 的面積為 27，求正方形 $ABCD$ 的面積 = (6)。



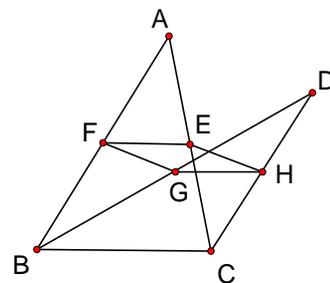
7. 在一個平面上，一定點 P 到四個點的距離分別為 7、8、10、11，求以這四個點為頂點之凸四邊形面積的最大值 = (7)。

8. 已知點 P 是正六邊形 $ABCDEF$ 內部一點，四邊形 $PFAB$ 、三角形 PBC 、四邊形 $PCDE$ 、三角形 PEF 的面積分別為 a 、 b 、 c 、 d ，且 $d=5b$ ，求 $\frac{a+b+c}{d}$ 的值 = (8)。

9. 已知三多項式 x^2+x-28 、 $x^2-6x-38$ 、 $x^2-4x-48$ 分別除以多項式 $x+a$ 得到的三個餘式之和為 6，
求整數 a 的所有可能值為 (9)。

10. 若 $2 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1 = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 、 h 均為小於 7 的非負整數，求 $a+c+e+g$ 的值 = (10)。

11. 如右圖所示， E 、 F 、 G 、 H 分別為 \overline{AC} 、 \overline{AB} 、 \overline{BD} 、 \overline{CD} 的中點，若三角形 ABC 的面積為 45，三角形 BCD 的面積為 35，求四邊形 $EFGH$ 的面積 = (11)。



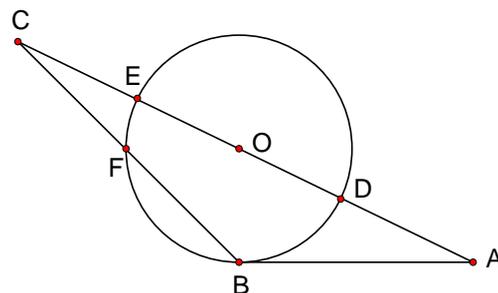
12. 試利用『前 n 個正整數平方和的公式： $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 』，計算前 30 個正奇數平方和的值，即求 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 59^2 =$ (12)。

13. 一個四位數 \overline{abcd} 共用了 3 個相異的阿拉伯數字，若 $a+c$ 、 b 、 d 為等差數列，且 $a+b=b+c=d$ ，求滿足以上條件的四位數中，最小的是 (13)。

14. 若四個相異實數 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ 、 $\frac{1}{d}$ 成等差數列，求 $\frac{a+b}{a-b} - \frac{c+d}{c-d}$ 的值 = (14)。

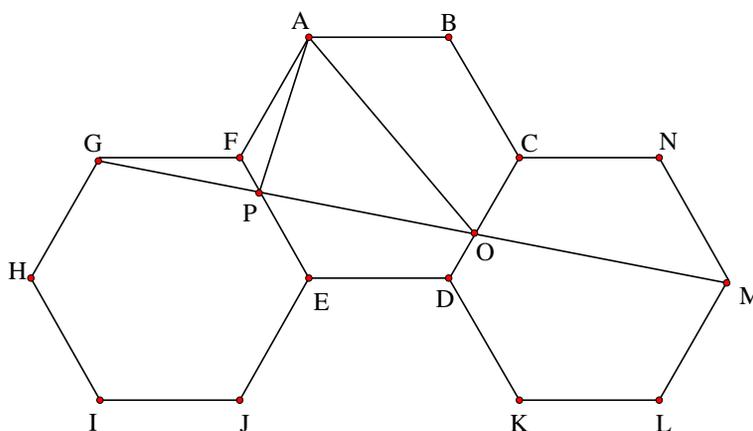
15. 有一個正整數 n ，使得 $n+82$ 、 $n+239$ 都是完全平方數，求 $n =$ (15)。

16. 如右圖所示， O 點為圓心， \overline{AB} 與圓 O 相切於 B 點， \overline{AC} 通過 O 點且與圓 O 交於 D 、 E 兩點， \overline{BC} 與圓 O 交於 F 點。若 $AB=6$ ， $AD=4$ ，且 $\angle CBA - \angle BDF = 90^\circ$ ，求 $\triangle BCD$ 的面積 = (16)。



二、計算證明題：(每小題 5 分，共 20 分。)

1 如右圖所示， $ABCDEF$ 、 $CDKLMN$ 、 $EFGHIJ$ 是三個邊長都是 2 的正六邊形，其中 \overline{CD} 、 \overline{EF} 是共用邊。連接 \overline{GM} 分別與 \overline{CD} 、 \overline{EF} 交於 O 、 P 兩點。再連接 \overline{AO} 、 \overline{AP} ，試回答下列問題：



- (1) 試證： $\overline{AO} + \overline{OP} + \overline{AP} = \overline{GM}$ 。
- (2) 求 $\triangle AOP$ 的周長。
- (3) 將 \overline{CD} 、 \overline{EF} 當成鏡面，若從 A 點發射一雷射光束射向 \overline{CD} 上的 O 點，則反射光會射向 \overline{EF} 上的 P 點，再接著第二次反射光會回到 A 點，請說明理由。
- (4) 求 \overline{AO} 的長。