

命題範圍：第一冊～第四冊

請正確劃記班級、座號、科目代碼，若未劃記或劃記錯誤，扣 5 分。注意：總分超過 100 分，以 100 分計。

一、單選題（35 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 7 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若 α 是方程式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的實數解，則 α 滿足下列哪個選項？
 - (1) $1 < \alpha < 2$
 - (2) $\frac{2}{3} < \alpha < 1$
 - (3) $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$
 - (4) $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$
 - (5) $0 < \alpha < \frac{1}{3}$

2. 若函數 $y = f(x) = |\log_a x| - 2^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的圖形交 x 軸於相異兩點 $P(m, 0)$ ， $Q(n, 0)$ ，則下列選項何者正確？
 - (1) $mn = 1$
 - (2) $0 < mn < 1$
 - (3) $1 < mn < 2$
 - (4) $mn > 2$
 - (5) $mn = 2$

3. 已知 $\triangle ABC$ 是邊長為 1 的正三角形，點 D ， E 分別是邊 \overline{AB} ， \overline{BC} 的中點，連接 \overline{DE} 並延長到點 F ，使得 $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EF}$ ，則內積 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值為何？
 - (1) $-\frac{5}{8}$
 - (2) $-\frac{1}{8}$
 - (3) $\frac{1}{4}$
 - (4) $\frac{1}{8}$
 - (5) $\frac{5}{8}$

4. 2017 年台北世大運組委會要從甲、乙、丙、丁、戊五名志願者中，選派四人分別從事翻譯、導遊、禮儀、司機四項不同工作，若其中甲和乙只能從事前兩項工作，其餘三人均能從事這四項工作，則不同的選派方案共有幾種？
- (1) 48 種
 - (2) 36 種
 - (3) 24 種
 - (4) 18 種
 - (5) 12 種
5. 今有資料數對 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{107}, y_{107})$ ，已知 x_1, x_2, \dots, x_{107} 的算術平均數為 12，標準差為 10； y_1, y_2, \dots, y_{107} 的算術平均數為 20，標準差為 14，則下列哪個選項可能是 Y 對 X 的迴歸直線？
- (1) $y = 1.5x + 2$
 - (2) $y = 1.4x$
 - (3) $y = 0.4x + 15.2$
 - (4) $y = -1.5x + 38$
 - (5) $y = -2x + 44$

二、多選題（48 分）

說明：第 6 題至第 11 題，每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯 3 個選項者，得 2 分；所有選項均未作答或答錯多於 3 個選項者，該題以零分計算。

6. 若 $f(x)$ 為滿足下列各條件之最低次多項式： $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $3x+2$ ， $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 11， $f(x)$ 的領導係數為 1，則下列何者為真？
- (1) $f(x)$ 為二次式
 - (2) $f(x)$ 之常數項為 6
 - (3) $f(x)$ 之各項係數和為 5
 - (4) $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $3x+8$
 - (5) 方程式 $f(x) = 7x$ 有有理根
7. 考慮坐標空間中的三平面 $E_1: ax + y + z = 1, E_2: x + by - z = 2, E_3: 2x - y - z = 3$ ，其中 a, b 整數。試問下列敘述何者正確？
- (1) 平面 E_1 與 E_2 不可能垂直
 - (2) 平面 E_2 與 E_3 不可能平行
 - (3) 平面 E_1 與 E_3 不可能垂直
 - (4) 當 $a = -2, b = -1$ 時，三平面 E_1, E_2, E_3 沒有共同交點
 - (5) 當 $a = 2, b = -1$ 時，三平面 E_1, E_2, E_3 相交於一直線

8. 若 n 是一個三位正整數，且 n 的個位數字大於十位數字，十位數字大於百位數字，則稱 n 為“三位遞增數”（如 137, 359, 567 等）。在某次數學趣味活動中，每位參加者需從所有的“三位遞增數”中隨機抽取 1 個數。下列選項何者正確？

(1) 全部“三位遞增數”有 84 個

(2) 個位數字是 5 的“三位遞增數”有 5 個

(3) 抽取的“三位遞增數”的三個數字之積不能被 5 整除的機率為 $\frac{2}{3}$

(4) 抽取的“三位遞增數”的三個數字之積能被 5 整除，但不能被 10 整除的機率為 $\frac{1}{14}$

(5) 抽取的“三位遞增數”的三個數字之積能被 10 整除的機率為 $\frac{11}{42}$

9. 設 a, b, c, d 皆為實數，若二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$ ，稱方陣 A 為「特殊平方矩陣」。

關於特殊平方矩陣的敘述下列哪些選項是正確的？

(1) 設 r 為實數，則 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ 為特殊平方矩陣

(2) 設 r, s 皆為實數，若矩陣 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ 為特殊平方矩陣，則 $r = s$

(3) 若二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為特殊平方矩陣，則 $bc = 0$

(4) 若二階方陣 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ 為特殊平方矩陣且 $c \neq 0$ ，則 $ad \neq 0$

(5) 若二階方陣 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ 為特殊平方矩陣且 $c \neq 0$ ，則 $ad = 0$

10. 設銳角三角形 ABC 中， D 為 \overline{BC} 的中點，由 D 向 \overline{AB} 、 \overline{AC} 作垂線，垂足分別為 E 、 F ，

若 $\overline{AE} : \overline{EB} = 7 : 5$ ， $\overline{AF} : \overline{FC} = 5 : 3$ ，又 a 、 b 、 c 分別表示 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長。

則下列選項何者正確？

(1) $\cos B = \frac{5c}{6a}$

(2) $\cos C = \frac{3b}{4a}$

(3) $\cos A < 0$

(4) $a = b^2$

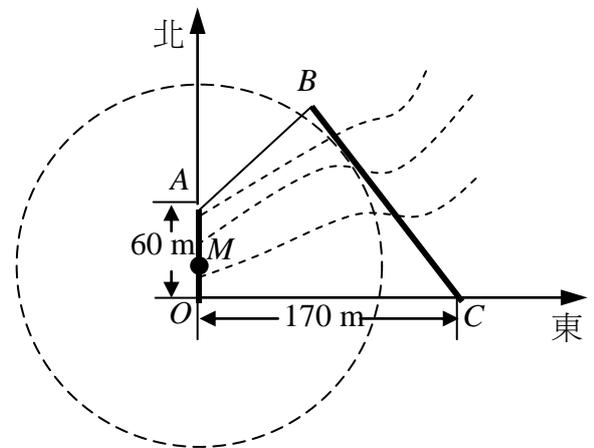
(5) 若 $a = 4$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\sqrt{23}$

11. 設等差數列 $\{a_n\}$ 的公差為 d ，前 n 項和為 S_n ；點 (a_n, b_n) 在函數 $y = f(x) = 2^x$ 的圖形上 (n 為正整數)。若 $a_{11} = 18$ ，且點 $(a_8, 4b_7)$ 為函數 $y = f(x)$ 圖形上的一點，則下列選項何者正確？
- (1) $\log b_8 = a_6 + S_4$
 - (2) $\{b_n\}$ 為公比為 2 的等比數列
 - (3) 對於所有自然數 n ， b_n 必為完全平方數
 - (4) 對於所有自然數 n ， $S_n \geq a_n$ 恆成立
 - (5) 點 (S_5, b_7) 亦在函數 $y = f(x)$ 的圖形上

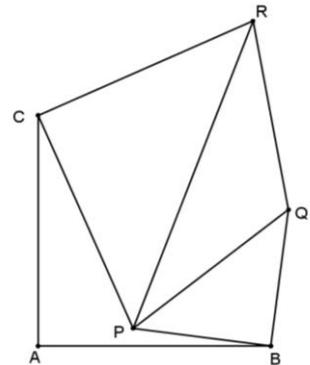
三、選填題 (21 分)

說明：第 A 題至第 C 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (- ~ 3)。每格完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 如圖，為了保護河上古橋 \overline{OA} ，規劃建一座新橋 \overline{BC} ，同時設立一個圓形保護區。規劃要求：新橋 \overline{BC} 與河岸 \overline{AB} 垂直；保護區的邊界為圓心 M 在線段 \overline{OA} 上並與 \overline{BC} 相切的圓。經測量，點 A 位於點 O 正北方向 60 公尺處，點 C 位於點 O 正東方向 170 公尺處 (\overline{OC} 為河岸)， $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$ 。則新橋 \overline{BC} 的長度為 公尺。



- B. 如右圖，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 7\sqrt{2}$ ， $\overline{CP} = \overline{CR} = 10$ ， $\overline{BP} = \overline{BQ} = 6$ ， $\angle CAB = \angle RCP = \angle PBQ = 90^\circ$ ，則 ΔPQR 的面積為 01。



- C. 已知橢圓 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，四點 $P_1(1,1)$ ， $P_2(0,1)$ ， $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三點在橢圓 C 上。則數對 $(a,b) = \underline{(2, 3)}$ 。

市立臺中一中 106 學年度 第一學期期末考 高三數學自然組 簡答

一、單選題

1. (4) 2. (2) 3. (4) 4. (2) 5. (3)

二、多選題

6. (2)(3)(5) 7. (2)(4)(5) 8. (1)(3)(4)(5) 9. (1)(3) 10. (1)(2)(5) 11. (5)

三、選填題

A. 150 B. 30 C. (2,1)