

國立新竹女中 107 學年度代理教師甄選數學科試題

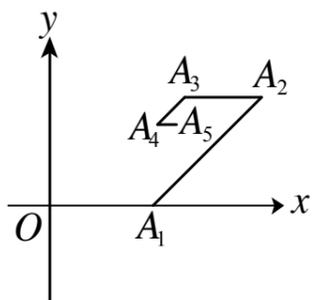
准考證號碼：_____ 姓名：_____

一、填充題(每格 5 分，共 70 分)

1. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$ ，若方程式 $f(x) + x + k = 0$ 有二實根，則 k 的範圍為_____。

2. 若方程式 $x^4 + 2\sqrt{3}(\log_2 k)x^2 + 4 - (\log_2 k)^2 = 0$ 有四個相異實根，則 k 的範圍為_____。

3. 如下圖， $O(0,0)$ ， $A_1(8,0)$ ， $\overline{A_1A_2}$ 與 x 軸正向夾 45° 角，又 $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_3A_4} \parallel \overline{A_5A_6} \parallel \dots$ ，且 $\overline{OA_1} \parallel \overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_4A_5} \parallel \dots$ ，已知： $\overline{A_1A_2} = 8$ ， $\overline{A_1A_2} = 2\overline{A_2A_3}$ ， $\overline{A_2A_3} = 2\overline{A_3A_4}$ ， \dots ， $\overline{A_kA_{k+1}} = 2\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$ ， $k \in N$ 。若點 A_n 的坐標為 (x_n, y_n) ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) =$ _____。



4. 甲、乙、丙、丁、 \dots 等 7 人，每人都會洗碗，也會做飯；但每餐飯，做飯者不洗碗。某假日午、晚兩餐，做飯者非同一人，洗碗者非同一人，則安排情形有_____種。

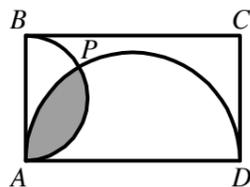
5. 有 3 顆芭樂、4 顆鳳梨、5 條香蕉，將這些水果隨機一分給 12 位同學，則香蕉先分完的機率為_____。

6. 已知：三向量 $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ，且 $\overline{PA} = 3$ ， $\overline{PB} = 3$ ， $\overline{PC} = \sqrt{6}$ ，則四邊形 $PABC$ 面積 = _____。

7. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ，且外接圓的半徑為 6，則 $\begin{vmatrix} 1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & -1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & -1 \end{vmatrix}$ 的值為_____。

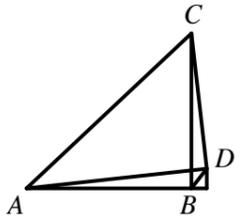
8. 空間中兩歪斜線 L 與 M ，在 L 上有相異兩點 A 、 B ，在 M 上有相異兩點 C 、 D ，其中 \overline{AC} 為 L 與 M 之公垂線段。若 L 之方向向量為 $(1, 2, 3)$ ， M 之方向向量為 $(3, -1, 2)$ ，且 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{CD} = 5$ ， $\overline{AC} = 4$ ，則 \overline{BD} 長為_____。

9. 如下圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ， $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{AD} 為直徑作半圓交於 P ，則鋪色區域面積為_____。



10. 如下圖，平面上 $\overline{AC} = \overline{AD}$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle CAD = \alpha$ ， $\angle CBD = \beta$ ， $\angle CAB = \gamma$ ，若 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ，

則 $\tan \gamma =$ _____。



11. 擲一公正的骰子二次，若第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，則 $\frac{x+y-|x-y|}{2}$ 的期望值為_____。

12. 設方程式 $x^2 + (m+1)x + (m+4) = 0$ 的兩根為 $\tan \alpha$ 與 $\tan \beta$ ，若 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{n-1}(\alpha + \beta)$ 為收斂，則 m 的範圍為_____。

13. 設函數 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+b}-a, & x \neq 2 \\ \frac{1}{6}, & x = 2 \end{cases}$ ，其中 a, b 是常數，若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處連續，則數對 $(a, b) =$ _____。

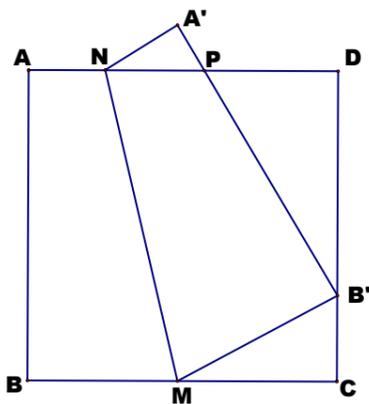
14. 設曲線 $y = f(x) = x^3$ 與直線 $y = 0$ ， $x = 0$ 及 $x = 4$ 所圍成的區域 S ，其下和為 L_n ，上和為 U_n ，若 $U_n - L_n < 0.01$ ，則 n 之最小正整數為_____。

二、計算或證明題(每題 10 分，共 30 分，須有計算或證明過程)

1. 設 $a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值。

2. 若過原點可對 $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ 函數圖形作三條切線，則 a 的範圍為何？

3. 如下圖，有一邊長為 1 的正方形 $ABCD$ ，沿 \overline{MN} 對折，使得 A 、 B 對折之後分別重合於 A' 、 B' 兩點，且在 \overline{CD} 上，則 (1) 證明 $\triangle PB'D$ 的周長為 2 (2) 求 $\triangle MB'C$ 的最大面積。



國立新竹女中 107 學年度代理教師甄選數學科試題答案卷

准考證號碼：_____ 姓名：_____

.....彌封線

一、填充題(每格 5 分，共 70 分)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

二、計算或證明題(每題 10 分，共 30 分，請依序標明題號，須有計算或證明過程)

一、填充題(每格 5 分，共 70 分)

1	2	3	4	5	6	7
$k \geq -1$	$\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2}$	$\frac{24 + 32\sqrt{2}}{5}$	1302	$\frac{17}{72}$	$\frac{3\sqrt{15}}{2}$	$\frac{1}{8}$
8	9	10	11	12	13	14
$\sqrt{47} \text{ or } \sqrt{107}$	$\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{4}$	$\frac{37}{36}$	$\frac{91}{36}$	$m \geq 5$	(3,7)	25601

二、計算或證明題(每題 10 分，共 30 分，須有計算或證明過程)

1. 設 $a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值。 ANS: 0

2. 若過原點可對 $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ 函數圖形作三條切線，則 a 的範圍為何？ ANS: $a > 3$

3. 如下圖，有一邊長為 1 的正方形 $ABCD$ ，沿 \overline{MN} 對折，使得 A 、 B 對折之後分別重合於 A' 、 B' 兩點，且在 \overline{CD} 上，則

(1)證明 $\triangle PBD$ 的周長為 2 (2)求 $\triangle MBC$ 的最大面積。 ANS: (1)略 (2) $\frac{\sqrt{3}}{18}$

