

第一部分 高中數學

本部分皆為填充題，每題 5 分，共 40 分。

1. 把多項式  $x^3$  表示為

$$Ax(x+1)(x+2) + B(x+1)(x+2)(x+3) + Cx(x+2)(x+3) + Dx(x+1)(x+3)$$

則  $(A, B, C, D) =$  \_\_\_\_\_。

2. 級數

$$\sum_{1 \leq j < k \leq 10} jk$$

的和為 \_\_\_\_\_。

3. 座標空間中，直線

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$$

的點到平面

$$E: x + y + z = 9$$

的最短距離是 \_\_\_\_\_。

4. 設  $a, b$  是實數， $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$  在  $x = -3$  與  $x = -1$  分別有相對極大值或相對極小值。則  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。

5. 座標平面上，直線  $L: x + 2y - 10 = 0$  的點到橢圓

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

的點之間的最短距離為 \_\_\_\_\_。

6. 不等式

$$\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+4)^3} \leq 0$$

的解為 \_\_\_\_\_。

7. 矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

的反矩陣  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_。

8. 設

$$\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

則解不等式

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \geq 0$$

得出的解為\_\_\_\_\_。

## 第二部分 微積分

本部分皆為填充題，每題 5 分，共 40 分。

9. 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)^{11}}{2^{11}n^{12}}$$

為\_\_\_\_\_。

10. 設  $a, b$  是實數，使得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1,$$

則  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

11. 微分方程式

$$y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

的解為\_\_\_\_\_。

12. 設  $f(x)$  是一連續函數，滿足

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 \sin x + \int_0^x \frac{f(t) dt}{1+t^2},$$

則  $f(x) =$ \_\_\_\_\_。

13. 心臟線  $r = 1 + \cos \theta$  的長度是\_\_\_\_\_。

(提示： $r = f(\theta)$  所表示的曲線長度為

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

國立嘉義高級中學 107 學年度第 1 次教師甄選-數學科試題

14. 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

的值為\_\_\_\_\_。

15. 化學上理想氣體的壓力  $P$ ，體積  $V$  與溫度  $T$  之間的關係式為  $PV = kT$ ，其中  $k$  是常數。則

$$\frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial P}$$

的值為\_\_\_\_\_。

16. 設  $a$  是正數。體積分

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz dy dx$$

的值為\_\_\_\_\_。

**第三部分 數學專業**

本部分皆為是非題，只要標示出正確(T)或錯誤(F)即可，每小題 2 分，共 20 分。

I. 設  $n$  是正整數， $n \geq 5$ ，定義

$$D_n = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}, y, yx, yx^2, \dots, yx^{n-1} | x^n = e = y^2, yxy^{-1} = x^{n-1}\}。$$

判斷下列各項有關群  $D_n$  的敘述是否正確：

- (A) 對  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $(yx^j)^2 = e$ 。
- (B) 設  $H = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ ,  $K = \{e, y\}$ ，則  $D_n \cong H \times K$ 。
- (C) 承上， $D_n/H$  與  $H$  都是交換群，故  $D_n$  是一交換群。
- (D) 承上， $K$  是  $D_n$  的一正規子群(normal subgroup)且  $D_n/K \cong H$ 。
- (E)  $D_n$  的元素個數是  $2n$ 。

II. 以  $S_5$  表示由  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  互換位置所形成的排列群(permutation group): 以  $e$  表示  $S_5$  的單位元素，以  $(abc)$  表示  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$ 。

判斷下列各項有關群  $S_5$  的敘述是否正確：

- (A)  $(123)(234) = (12)(34)$ 。
- (B) 元素  $x = (123)(45)$  滿足  $x^6 = e$ 。
- (C) 元素  $y = (12)(13)$  滿足  $y^2 = e$ 。
- (D)  $S_5$  中滿足  $x \neq e$  但  $x^5 = e$  的元素共有 24 個。如  $(12345)$  是其中一個。
- (E)  $S_5$  共有 240 個元素。