

一、教學基礎知能(50%)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得 分	6	12	18	24	27	30	33	35	38	40	42	44	46	48	50

1. 已知正實數 a, b, c 滿足 $a+b+c=1$ ，則 $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最大值為_____。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，頂點 A, B, C 的對邊分別為 a, b, c 。已知 $c=10$ 且 $\cos A : \cos B = a : b = 4 : 3$ ，若 P 為 $\triangle ABC$ 內切圓上的動點，求 P 點到三頂點距離平方和的最大值為_____。

3. 定義在 R 上的函數 $f(x)$ ，對任意的實數 x 均有 $f(x+3) \leq f(x)+3, f(x+2) \geq f(x)+2$ ，且 $f(1)=2$ 。記 $a_n = f(n), n \in N$ ，則 $f(2017) =$ _____。

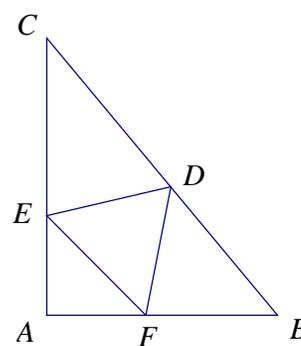
4. D, E, F 分別在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上，滿足 $\frac{BD}{DC} = \frac{AF}{FB} = \frac{CE}{EA} = \lambda$ 。

又 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 圍出 $\triangle LMN$ ，求兩三角形的面積比 $\frac{\Delta LMN}{\Delta ABC}$ 為_____。

5. 求 $1 \times 3 \times 5 \times 7 + 3 \times 5 \times 7 \times 9 + 5 \times 7 \times 9 \times 11 + \dots + 29 \times 31 \times 33 \times 35$ 之值為_____。

6. 空間中有相異 8 個點，其中任 3 點不共線，任 4 點不共平面，將每二點連成一直線，可以形成_____對歪斜線。

7. 如右圖(一)，有一個直角 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 $2\sqrt{3}, 5, \sqrt{37}$ ，若正 $\triangle DEF$ 的頂點分別在 $\triangle ABC$ 的三邊上，求正 $\triangle DEF$ 面積的最小值為_____。

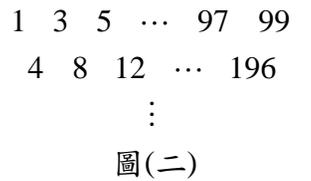


圖(一)

8. 如果一個正整數的立方的末三位為 999，則稱這樣的數為「久違數」，試求第二小的「久違數」是_____。

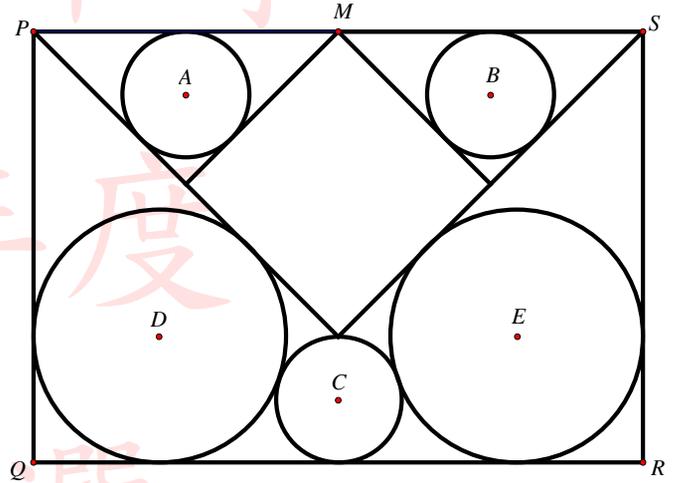
稿

9. 如右圖(二)所示，倒三角形陣列的最頂層的一列是由奇數 $1, 3, 5, \dots, 99$ 依遞增之方式排成的。第一列以下的每一列都比它緊鄰上方的一列少一個數，最底層的一列只有一個數。在最頂層之下每一列中的每一個數，是它緊鄰上方一列對角兩個數的和。在此陣列中有多少個數是 67 的倍數？答：_____個



10. 如右圖(三)，從長方形 $PQRS$ 的長邊 \overline{PS} 往內，作三個等腰直角

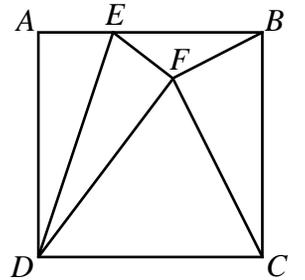
三角形，其中 M 為中點，且有五個內切於各邊長的圓 A, B, C, D, E ，其中圓 C 過最大等腰直角三角形的頂點，試求這五個圓 A, B, C, D, E 的半徑比為_____。



圖(三)

11. 如右圖(四)，正方形 $ABCD$ ， E 為 \overline{AB} 上一點，若 A 關於 \overline{DE} 之對稱點為 F ，

且 $\angle BFC = 90^\circ$ ，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} =$ _____。



圖(四)

12. 設實係數多項式 $P(x)$ 滿足 $(x+3)(x^2+2x+2)P(x) = (x-3)(x^2-2x+2)P(x+2)$ ，

試求所有可能的 $P(x)$ 為_____。

13. 設 O 為平面坐標的原點， A, B 兩點皆為格子點 (x, y 坐標皆為整數的點)。

已知 $\triangle OAB$ 的內心坐標為 $I(106 \times 2017, 7 \times 106 \times 2017)$ ，且 $\angle AOB$ 為直角。

試問：這樣的三角形有幾_____個。

14. 已知 x, y, z, u, v, w 均為正整數，且

$$\begin{aligned}
 & 334(xy zuvw + xy zu + xyzw + xy vw + xuvw + xy + xu + xw + zuvw + zu + zw + vw + 1) \\
 & = 6597(yz uvw + yz u + yzw + yv w + uvw + y + u + w)
 \end{aligned}$$

求 $x + y + z + u + v + w$ 之值為_____。

15. $u \geq 0, v \geq 0$ ，求 $(u-v)^2 + \left(\sqrt{1-u^2} - \frac{9}{v}\right)^2$ 之最小值為_____。

二、基本理論證明(20%)

16. 試證 $y = x^2$ 的圖形上的點在一拋物線上。
17. 試證明：雙曲線上一點至兩漸近線的距離乘積為一定值。
18. 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 a, b, c 均為整數。試證明：若可找到一個有理數 p 使 $f(p) = 0$ ，則 a, b, c 三數中至少有一個是偶數。
19. 試證明：點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 之距離 $d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (僅能使用高一學生會的方法證明之)

三、課程設計(30%)

20.

有一天老師出了一道試題：已知 a, b 均為正數，求 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right)$ 的最小值為何？

同學甲是這樣回答的： $\because a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}}$ 且 $\frac{4}{a} + 9b \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \times 9b}$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right) \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}} \times 2\sqrt{\frac{4}{a} \times 9b} = 24 \quad \text{得最小值為 } 24$$

同學乙是這樣回答的： $\because \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right) = 4 + 9ab + \frac{4}{ab} + 9 \geq 13 + 2\sqrt{9ab \times \frac{4}{ab}} = 25 \quad \therefore$ 最小值為 25

同學甲和乙一起向老師回答，然後看著老師等著回應。

試利用上述情境回答下列問題：

(1) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right)$ 的最小值為_____

(2) 甲、乙二人至少有一人答錯，請指出誰算錯了，以及這個人的錯誤之處。

請利用上述文本，設計大約 20 分鐘的課程，引導學生思考甲、乙兩人到底誰錯了？ (5%)

請詳述您的教學策略，特別是在課程設計中融入以學習者為中心的《體驗式課程設計》。 (5%)

若時間允可，請一併詳述您會如何利用這個文本來進行課室內的差異化教學。 (5%)

21. 如果您有幸獲聘為本校數學科專任教師，並獲校長邀約兼任行政工作，以「教學組長」一職為例，其最重要的工作項目為全校教師課表的安排。在課表安排之前，教務主任提供如下資料：已知本校校舍分為育善樓、進德樓、修業樓及致真樓等四棟建築主體。目前有普通教室 58 間、專科教室 26 間、電腦教室 3 間、視聽教室 1 間、會議室 2 間、圖 1 座、活動中心 1 間及辦公室 30 間。

107 學年度預計班級與學生人數		
	班級數	學生人數
高中部	33 班	1076 人
國中部	10 班	235 人

請問，在 108 新課綱的架構之下，本校一共需要

- (1) 多少位教師？ (5%)
- (2) 其中高中部國文、英文、數學、物理、化學、生物、地球科學、歷史、地理、公民、資訊、綜合活動等學科各需要多少位教師？ (5%)
- (3) 在每天七節課合計一週共 35 節課程中，必須如何安排校本必修課程，多元選修課程與彈性學習時數？請試著利用數學建模(Mathematical Modeling)的精神估算學校的教室是否足以使用？如果不夠，可以嘗試用什麼方法來解決？ (5%)

第一部分 參考簡答

1. $\frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 2. 88 3. 2018 4. $\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$ 5. 3,841,887 6. 210 7. $\frac{75\sqrt{3}}{67}$ 8. 1999 9. 17 10. 1:1:1:2:2
11. $\frac{1}{3}$ 12. $P(x) = c(x-3)(x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 2)$ 13. 36 14. 66 15. $19 - 6\sqrt{2}$

參考詳解

1. $\because b + \frac{1}{4} \geq \sqrt{b}$ 且 $c + \frac{2}{3\sqrt{3}} = c + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq 3\sqrt[3]{c(\frac{1}{3\sqrt{3}})^2} = \sqrt[3]{c} \therefore a + \sqrt{b} + \sqrt[3]{c} \leq a + b + \frac{1}{4} + c + \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9}$

等號成立之條件為 $a = \frac{3}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 、 $b = \frac{1}{4}$ 、 $c = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

2. 令 $a = 4k$ 、 $b = 3k$ 則 $\frac{10}{7} < k < 10$ (三角形邊長和差)。由正弦定理知 $a : b = \sin A : \sin B = \cos A : \cos B = 4k : 3k$ 得 $\triangle ABC$ 為邊長

8、6、10 之直角三角形得 $r = 2$ 。可訂內切圓為 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ ， $P(x, y)$ 在圓上，則至三頂點距離平方和為

$$(x-8)^2 + y^2 + x^2 + (y-6)^2 + x^2 + y^2 = 88 - 4x \leq 88$$

3. $f(x) + 3 \geq f(x+3) = f(x+1+2) \geq f(x+1) + 2$ ，可知 $f(x) + 1 \geq f(x+1)$
又 $f(x) + 4 \leq f(x+2) + 2 \leq f(x+4) = f(x+1+3) \leq f(x+1) + 3$ ，可知 $f(x+1) \geq f(x) + 1$ 故 $f(x+1) = f(x) + 1$ ，
因此 $f(2017) = 2018$

4. 令 $\triangle ABC = 1$ ，對 $\triangle BFC$ 與 \overline{AD} 使用孟氏定理得 $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CL}{LF} \cdot \frac{FA}{AB} = 1$ ，故 $\frac{CL}{LF} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}$ 得 $\frac{CL}{CF} = \frac{\lambda+1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

$$\triangle CLA = \frac{CL}{LF} \triangle AFC = \frac{CL}{CF} \frac{AF}{FB} \triangle ABC = \frac{\lambda+1}{\lambda^2 + \lambda + 1} \frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$$

同理 $\triangle BNC = \triangle AMB = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$ 故 $\triangle LMN = \triangle ABC - \triangle CLA - \triangle BNC - \triangle AMB = 1 - \frac{3}{\lambda^2 + \lambda + 1} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

5. $(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5) = (2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5) \frac{[-(2k-3) + (2k+7)]}{10}$

$$= \frac{1}{10} [-(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5) + (2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)]$$

$$\sum_{k=1}^{15} (2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)$$

$$= \frac{1}{10} [-(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)|_{k=1} + (2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)|_{k=15}]$$

$$= \frac{1}{10} [-(-1)(1)(3)(5)(7) + (29)(31)(33)(35)(37)] = 3,841,887$$

6. $\frac{C_4^8 C_2^4}{8} = 210$

7. 假設 $A(0,0)$ 、 $B(2\sqrt{3},0)$ 、 $C(0,5)$ 、 $F(a,0)$ 、 $E(0,b)$ ，則 \overline{EF} 中點為 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ， \overline{EF} 的法向量為 $(\frac{\sqrt{3}b}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$ ，

故 $D(\frac{a+\sqrt{3}b}{2}, \frac{\sqrt{3}a+b}{2})$ 而 D 在 $5x+2\sqrt{3}y=10\sqrt{3}$ 上，故 $5(\frac{a+\sqrt{3}b}{2}) + 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}a+b}{2}) = 10\sqrt{3}$ 整理得 $11a+7\sqrt{3}b=20\sqrt{3}$

由柯西不等式： $[11^2 + (7\sqrt{3})^2](a^2 + b^2) \geq (11a + 7\sqrt{3}b)^2 = (20\sqrt{3})^2$ 得 $a^2 + b^2 \geq \frac{300}{67}$ 故 $\triangle DEF$ 面積的最小值為 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{300}{67} = \frac{75\sqrt{3}}{67}$

8. 假設久違數為 x ，則 $x^3 = 1000k + 999 \Rightarrow x^3 + 1 = 1000(k+1) \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 1000(k+1)$

$\because x^3$ 為奇數 $\therefore x$ 為奇數 $\Rightarrow x+1$ 為偶數、 $x^2 - x + 1$ 為奇數

故，可設 $x+1 = 8m$ (m 為正整數) $\Rightarrow m(x^2 - x + 1) = 125(k+1)$ 接下來證明 $x^2 - x + 1$ 不是 5 的倍數

(1) 若 $x = 5t$ ，則 $x^2 - x + 1 = 25t^2 - 5t + 1$

(2) 若 $x = 5t + 1$ ，則 $x^2 - x + 1 = 5t(5t + 1) + 1$

- (3) 若 $x = 5t + 2$ ，則 $x^2 - x + 1 = 25t^2 + 15t + 3$ (4) 若 $x = 5t + 3$ ，則 $x^2 - x + 1 = 25t^2 + 25t + 7$
 (5) 若 $x = 5t + 4$ ，則 $x^2 - x + 1 = 25t^2 + 35t + 13$ 可見 $x^2 - x + 1$ 不是 5 的倍數 可得 $m = 125n \Rightarrow x + 1 = 100n$
 當 $n = 1$ 時， $x = 999$ 最小；當 $n = 2$ 時，1999 為第二小的久違數

9. (方法 1) 設第 n 列的一般項為 a_n ，則 $a_n = 2^{n-1}(2k_n + n)$ ，且 $0 \leq k_n \leq 50 - n$

如第 1 列的一般項為 $a_1 = 2k_1 + 1$ ， $0 \leq k_1 \leq 49$ 、第 2 列的一般項為 $a_2 = 2(2k_2 + 2)$ ， $0 \leq k_2 \leq 48$ 、

第 3 列的一般項為 $a_3 = 2^2(2k_3 + 3)$ ， $0 \leq k_3 \leq 47$

依題意， $a_n = 67m$ ， $m \in N$ 得 $a_n = 2^{n-1}(2k_n + n) = 67m$ ，且 $0 \leq k_n \leq 50 - n \Rightarrow 2k_n + n = 67$ ，且 $0 \leq k_n \leq 50 - n$

$\Rightarrow 2k_n + n \leq 100 - n$ ， $67 \leq 100 - n \therefore n \leq 33$ ，又 n 為奇數 $\Rightarrow n = 1, 3, 5, \dots, 33$ 共 17 個

(方法 2) 以第 1 列的 67 為基準，定義為 0，則第 1 列的各項為 $-66, -64, -62, -60, \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots, 32$

依陣列的運算規則得 第 2 列的各項為 $-130, -126, -122, -118, \dots, -10, -6, -2, 2, 6, \dots, 62$

第 3 列的各項為 $-256, -248, -240, -232, \dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots, 120$

依此類推，只要有出現“0”者的項，即為 67 的倍數 而且只有在第 1、3、5、7、9、...、33 列才會出現“0”者的項

故共有 17 個數為 67 的倍數

10. 不失一般性，令矩形之長為 1 圓 A、C、E 之半徑分別為 r_A, r_C, r_E

(1) 由圓 A 中， $r_A + \sqrt{2}r_A = \frac{1}{4}$ ，得 $r_A = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$

(2) 在圓 C、E 中，由外公切線長，可得 $\frac{1}{2} = \sqrt{(r_E + r_C)^2 - (r_E - r_C)^2} + r_E = 2\sqrt{r_C r_E} + r_E$ (*)

又由長方形寬的等量關係，可得 $(1 + \sqrt{2})r_E \times \sqrt{2} = (\frac{1}{2} + 2r_C)$ $\therefore r_C = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})r_E - \frac{1}{4}$ 代入上式(*)

得 $\frac{1}{2} = 2\sqrt{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})r_E - \frac{r_E}{4} + r_E}$ $\therefore r_E^2 = \frac{1}{4(3 + 2\sqrt{2})}$ ，即 $r_E = \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})} = 2r_A \Rightarrow r_C = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{4} = r_A$

$\therefore r_A : r_B : r_C : r_D : r_E = 1 : 1 : 1 : 2 : 2$

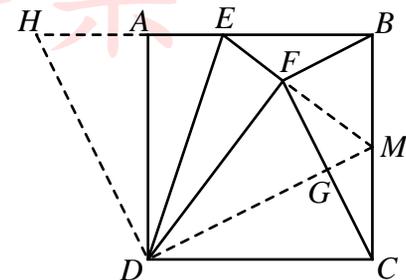
11. 如右下圖，延長 \overline{EF} 交 \overline{BC} 於 M ，連接 \overline{DM} ，與 \overline{CF} 交於 G 則易得 $\triangle DFM \cong \triangle DCM$ ，得 $\overline{CG} = \overline{GF}$ ，又 $\angle BFC = 90^\circ$

$\therefore \overline{GM} \parallel \overline{BF}$ 且 $\overline{GM} = \frac{1}{2}\overline{BF}$ ，則 M 為 \overline{BC} 中點 $\therefore \angle EDM = \angle EDF + \angle FDM = \frac{1}{2}(\angle ADF + \angle FDC) = 45^\circ$

將 $\triangle MDC$ 以 D 為中心逆時針旋轉 90° ，得到 $\triangle HAD$ ，則 $\triangle MDE \cong \triangle HDE$

故 $\overline{EM} = \overline{HE} = \overline{AE} + \overline{MC}$ ，又設正方形邊長為 1， $\overline{AE} = x$

$\therefore \overline{EB}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{EM}^2$ ，得 $(1-x)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$



12. 因為 $P(3) = P(1) = P(-1) = P(1 \pm i) = 0$ ，所以設 $P(x) = (x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)Q(x)$

可得 $P(x+2) = (x-1)(x+1)(x+3)(x^2+2x+2)Q(x+2)$ ，由 $(x+3)(x^2+2x+2)P(x) = (x-3)(x^2-2x+2)P(x+2)$

得 $(x+3)(x^2+2x+2)(x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)Q(x) = (x-3)(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)(x+3)(x^2+2x+2)Q(x+2)$

可知 $Q(x) = Q(x+2)$ ，若 $\deg Q(x) > 1$ ，則方程式 $Q(x) = 0$ 會有無限多個根，得 $Q(x) = c$ ，

故 $P(x) = c(x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)$

13. 不失一般性，假設 A 點在第一象限，則 B 點在第二象限。設 \overline{OA} 與 x 軸正向的夾角為 α 、 \overline{OB} 與 x 軸正向的夾角為 β

($\tan \beta = 7$)， $\angle AOB = 45^\circ$ 。 $\tan \alpha = \tan(\beta - 45^\circ) = \frac{\tan \beta - 1}{1 + \tan \beta} = \frac{3}{4}$ ，故設 $A(4t, 3t)$ ，則 $B(-3s, 4s)$ ，其中 t, s 皆為自然數。

則 $\triangle OAB$ 的內切圓半徑 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OI} = 5 \times 106 \times 2017$ 。

因為 $\overline{OA} = 5t, \overline{OB} = 5s$ ，得 $\overline{AB} = (5t - r) + (5s - r) = 5t + 5s - 2r$ 。

由畢氏定理得 $(5t + 5s - 2r)^2 = (5t)^2 + (5s)^2 \Rightarrow 2r^2 - 10rt - 10rs + 25st = 0$

$\Rightarrow st - 2ks - 2kt + 2k^2 = 0 \Rightarrow (s - 2k)(t - 2k) = 2k^2 = 2^3 \times 53^2 \times 2017^2$ ，其中 $k = 106 \times 2017 = 2 \times 53 \times 2017$ ，故有 36 組解。

14.

$$\begin{aligned} & \frac{xyzuvw + xyzu + xzvw + xyvw + xuvw + xy + xu + xv + zuvw + zu + zv + vw + 1}{yzuvw + yzu + yzv + yvw + uvw + y + u + w} \\ &= x + \frac{xyzuvw + xyzu + xzvw + xyvw + xuvw + xy + xu + xv + zuvw + zu + zv + vw + 1}{yzuvw + yzu + yzv + yvw + uvw + y + u + w} \\ &= x + \frac{1}{yzuvw + yzu + yzv + yvw + uvw + y + u + w} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{uvw + u + w}{zuvw + zu + zv + vw + 1}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{uvw + u + w}}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{u + v + w}}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{u + v + w}}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{u + v + w}}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{u + v + w}}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{u + v + w}}} \\ &= x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{u + v + w}}} \end{aligned}$$

故 $xyzuvw = 1913411 \Rightarrow x + y + z + u + v + w = 19 + 1 + 3 + 41 + 1 = 66$

15. $(x, y) = (u, \sqrt{1 - u^2}) \Rightarrow x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ (圓) $(x, y) = (v, \frac{9}{v}) \Rightarrow xy = 9$ (雙曲線) 所求 $= (\overline{OQ} - \overline{OP})^2 = (3\sqrt{2} - 1)^2 = 19 - 6\sqrt{2}$

16. $y = x^2 \Rightarrow y^2 + y = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 + \frac{1}{2}y = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y \Rightarrow (y + \frac{1}{4})^2 = x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{4})^2} = \frac{|y + \frac{1}{4}|}{\sqrt{1}}$

設 $P(x, y)$, $F(0, \frac{1}{4})$, $L: y + \frac{1}{4} = 0$, 滿足 $\overline{PF} = d(P, L) \dots$ 拋物線定義, 故 $P(x, y)$ 在拋物線上

17. 不失一般性可設雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 則其漸近線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 即 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ 與 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

設 $P(u, v)$ 點在雙曲線上, 則 $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ 且 $P(u, v)$ 到兩條漸近線的距離乘積為

$$\frac{\left|\frac{u}{a} + \frac{v}{b}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} \times \frac{\left|\frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{\left|\left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b}\right)\left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)\right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \text{ 為定值。}$$

18. 能找到 p 的充要條件為 $D = b^2 - 4ac$ 為完全平方數。

設 a, b, c 均為奇數，為了方便，令 $2m+1$ ，則 $D = 4[m(m+1) - ac] + 1$ ，可得 $D = 8n+5$ ，即 D 為以 8 除之餘 5 的奇數。

但任一奇數 $2k+1$ 的平方為 $4k(k+1)+1$ ，這是除以 8 餘 1 的奇數。故 D 不為完全平方數。

所以， a, b, c 不可三者均為奇數。

19. (1) 若 $a=0$ 或 $b=0$ ，則很容易檢查出公式成立。

(2) 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ ，則

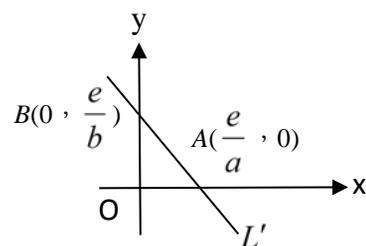
(i) 因平移不影響距離，所以將點 $P(x_0, y_0)$ 平移至原點

$O(0, 0)$ ，即左移 x_0 且下移 y_0 ，則直線 $L: ax+by+c=0$ 變為 $L': a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$

(ii) L' 之 x 截距為 $\frac{ax_0+by_0+c}{a} = \frac{e}{a}$ ， L' 之 y 截距為 $\frac{ax_0+by_0+c}{b} = \frac{e}{b}$ ，其中 $e = -(ax_0+by_0+c)$ ，

$\therefore d(P, L) = d(O, L') =$ 直角三角形 OAB 中斜邊上的高 $= \frac{\text{兩股相乘}}{\text{斜邊}}$

$$= \frac{\left|\frac{e}{a} \times \frac{e}{b}\right|}{\sqrt{\left(\frac{e}{a}\right)^2 + \left(\frac{e}{b}\right)^2}} = \frac{|e|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



20. 略

21. 略

數學科

試題暨參考答案

新聞稿

一、 教學基礎知能(50%)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得 分	6	12	18	24	27	30	33	35	38	40	42	44	46	48	50

題號	1	2	3	4	5
答案					
題號	6	7	8	9	10
答案					
題號	11	12	13	14	15
答案					

二、 基本理論證明(20%)

16. 試證 $y = x^2$ 的圖形上的點在一拋物線上。

17. 試證明：雙曲線上一點至兩漸近線的距離乘積為一定值。

18. 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 a, b, c 均為整數。

試證明：若可找到一個有理數 p 使 $f(p) = 0$ ，則 a, b, c 三數中至少有一個是偶數。

19. 試證明：點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 之距離 $d(P, L) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (僅能使用高一學生會的方法證明之)

西松高級中學

107 學年度

教師甄選

數學科

試題暨參考答案

新

聞

稿

三、課程設計(30%)

20.

有一天老師出了一道試題：已知 a 、 b 均為正數，求 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right)$ 的最小值為何？

同學甲是這樣回答的：

$$\because a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}} \text{ 且 } \frac{4}{a} + 9b \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \times 9b}$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right) \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}} \times 2\sqrt{\frac{4}{a} \times 9b} = 24 \text{ 得最小值為 } 24$$

同學乙是這樣回答的：

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right) = 4 + 9ab + \frac{4}{ab} + 9 \geq 13 + 2\sqrt{9ab \times \frac{4}{ab}} = 25 \quad \therefore \text{最小值為 } 25$$

同學甲和乙一起向老師回答，然後看著老師等著回應。

試利用上述情境回答下列問題：

(1) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a} + 9b\right)$ 的最小值為_____

(2) 甲、乙二人至少有一人答錯，請指出誰算錯了，以及這個人的錯誤之處。

請利用上述文本，設計大約 20 分鐘的課程，引導學生思考甲、乙兩人到底誰錯了？ (5%)

請詳述您的教學策略，特別是在課程設計中融入以學習者為中心的《體驗式課程設計》。(5%)

若時間允可，請一併詳述您會如何利用這個文本來進行課室內的差異化教學。(5%)

試題暨參考答案

新聞稿

21. 如果您有幸獲聘為本校數學科專任教師，並獲校長邀約兼任行政工作，以「教學組長」一職為例，其最重要的工作項目為全校教師課表的安排。在課表安排之前，教務主任提供如下資料：已知本校校舍分為育善樓、進德樓、修業樓及致真樓等四棟建築主體。目前有普通教室 58 間、專科教室 26 間、電腦教室 3 間、視聽教室 1 間、會議室 2 間、圖書館 1 間、溫水游泳池 1 座、大桌球練習場 1 座、活動中心 1 間及辦公室 30 間。

107 學年度預計班級與學生人數

	班級數	學生人數
高中部	33 班	1076 人
國中部	10 班	235 人

請問，在 108 新課綱的架構之下，本校一共需要

- (1) 多少位教師？(5%)
- (2) 其中高中部國文、英文、數學、物理、化學、生物、地球科學、歷史、地理、公民、資訊、綜合活動等學科各需要多少位教師？(5%)
- (3) 在每天七節課合計一週共 35 節課程中，必須如何安排校本必修課程，多元選修課程與彈性學習時數？請試著利用數學建模(Mathematical Modeling)的精神估算學校的教室是否足以使用？如果不夠，可以嘗試用什麼方法來解決？(5%)

教師甄選

數學科

試題暨參考答案

新

聞

稿

臺北市立 西松高級中學

107 學年度

教師甄選

數學科

試題暨參考答案

新 聞 稿

臺北市立 西松高級中學

107 學年度

教師甄選

數學科

試題暨參考答案

新聞稿