臺北市立建國高級中學 107 學年度第二次正式教師甄選 數學科題目卷

本次甄選試題分兩大部分，第一部分為填充題(共 9 題)，需填寫在答案卷第 1 頁所對應的空格中；第二部分為計算證明題(共 3 題)，需依題號填寫在答案卷第 2、3、4、5 頁。

一、填充題：(每題 7 分，共 63 分)

1. 實係數方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有四根為 α、β、γ、ω，其中 $\alpha+\beta=3+6i$ 且 $\gamma\omega=4+3i$，則 $a+b+c+d=$ ____________________。

2. 方程式 $(4x+1)(6x+1)(8x+1)(24x+1)=21$ 之實數解為__________________。

3. 設區域 D 為聯立方程組 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ y\ge x^2-1 \end{cases}$ 的解 (x,y) 所形成的區域，若直線 $L:y=k(x+2)-2$ 與區域 D 有交點，試求 k 的範圍為____________________。

4. 將甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸，10 人平分成 5 組。若甲、乙不同組，且丙、丁不同組，且戊、己不同組，且庚、辛不同組，且壬、癸不同組，且甲、己同組，則共有_______________種不同的分組方法。

5. 某醫院有四名志工甲、乙、丙、丁，若醫院每天需要二名志工，且每人至少參加二天志工服務，則該醫院週一至週五的 5 天志工服務有__________________種安排的方法。

6. 在 ΔABC 中，已知 M 為 $\overline{BC}$ 的中點，點 P、Q 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AP}=4$，$\overline{PB}=3$，$\overline{AQ}=2$，$\overline{QC}=1$，$\angle PMQ=90^\circ$，則 $\cos A$ 的值為_________________。

7. 設 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 為平面上兩個非零向量，且 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 60°，令 $r=\dfrac{|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|}{|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|}$，試求 r 的範圍為________________。

8. 試求 $\sin\dfrac{\pi}{25}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{25}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{25}\cdots\cdot\sin\dfrac{12\pi}{25}$ 之值為__________________。

9. 已知 n 為正整數，且 $f(n)=1^n+2^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+(n-1)^2+n$，則 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ 的最小值為____________。

二、計算證明題(共 37 分) (未寫出計算過程不予計分)

1. 回答下列關於教學上的問題，請簡述你的處置或做法。

(1) 請設計故事情境來說明「$k\cdot C_k^n = n\cdot C_{k-1}^{n-1}$ (其中 $k<n$，n、k 均為正整數)」成立。(4 分)**(送分)**

(2) 有一個問題：「$x>0$，求 $2x^2+2x+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+1$ 的最小值=_______。」，甲生的解法：

因為 $x>0$，所以 $2x>0$ 且 $\frac{4}{x}>0$，由算幾不等式可得：

$2x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{2}$ …….(a)

又 $2x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=2\sqrt{2}$ …………(b)

由(a)、(b)，可得 $2x^2+2x+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+1\geq 4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1=6\sqrt{2}+1$

所以最小值為 $6\sqrt{2}+1$

請問甲生解題的過程恰當嗎？身為老師如何評論學生的解題過程。(4 分)

(3) 討論線性變換前後平行四邊形的面積關係有以下的定理：

> 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，
>
> 若 A 將平行四邊形區域 R“變換” 到另一平行四邊形區域 R'。
>
> 則 (R'的面積)：(R 的面積)＝$|\det(A)|:1$。

請問除了直接證明之外，如何舉例讓學生對於這個定理能有較直觀的感覺。(5 分)

2. 若 $ABCDEF$ 為一圓內接六邊形，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=a$，$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}=b$，以 a、b 表示下列各值：

(1) $\overline{BF}$ 長度　　(2) 六邊形 $ABCDEF$ 的面積。(10 分)

3. 令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，(其中 n 為正整數)，試回答下列各問題：(14 分)

(1) 試證明：當 $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ 時，$\tan x\leq x+1-\frac{\pi}{4}$。

(2) 試求 $\lim_{n\to\infty} I_n$ 的值。

(3) 請用 n 表示 I_n+I_{n+2} 的值。

(4) 利用(3)的結果計算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ 的和。