Chapter 6　Linear Algebra

Matrices(矩陣)、Vectors(向量)、Determinants(行列式) and System of Linear Equations 線性系統方程式。

6-1 **矩陣**：將一群數有規則排列成長方形陣式，並以 ( ) 或 [ ] 包圍之。

例如：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$, 〔$a_1$, a_2 , a_3〕, $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{bmatrix}$

應用於 **線性系統矩陣方程式**

例如：$\begin{cases} x+2y-z+4w=0 \\ 3x-4y=2z-6w=0 \\ x-3y-2z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

m×n **矩陣** (m 列、n 行)之定義：

$$A=[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

a_{ij} 代表位於第 i 列第 j 行之數稱為 A 之元素(element)

1. Column matrix(行矩陣)

   (vector)

   $$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

2. **Row matrix(列矩陣)**

   (vector)

   a=〔$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$〕

3. **Square matrix (方陣)**　m = n
4. Triangular matrix(三角矩陣)

   $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 下三角矩陣　　$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 上三角矩陣

5. **Diagonal matrix(對角矩陣)**

   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$　　$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

6. Unit matrix(單位矩陣)

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

7. Transpose matrix(轉置矩陣)

m×n 之行列互換為 n×m

$$A=\begin{bmatrix}1&2&5\\4&7&-5\end{bmatrix}\qquad A^T=\begin{bmatrix}1&4\\2&7\\5&-5\end{bmatrix}$$

8. Symmetric matrix(對稱矩陣)

$A^T=A$ 或 $A=A^T$

$(a_{ji}=a_{ij})$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&7\\2&3&-4\\7&-4&5\end{bmatrix}$$

9. Skew-symmetric matrix(反對稱矩陣)

$$A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\2&0&4\\-1&-4&0\end{bmatrix}$$

$A^T=A$

$a_{ji}=-a_{ij}$

若 $i=j$, $a_{ii}=-a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii}=0 \Rightarrow a_{ii}=0$

矩陣之相等性 $A=B$ $(a_{jk}=b_{jk})$

$a_{11}=b_{11}$, $a_{22}=b_{22}$ $\cdots$ $a_{mn}=b_{mn}$

矩陣之加法(同為 n×m 矩陣)

$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$ 例：$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&8&-4\\3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&10&-1\\5&8&-6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&5\\8&0\end{pmatrix}$=不存在

純量相乘： α 為純量 $\alpha A=\left[\alpha a_{ij}\right]$

$$A=\begin{bmatrix}8&0\\2&4\\10&-6\end{bmatrix}\qquad \frac{A}{2}=\begin{bmatrix}4&0\\1&2\\5&-3\end{bmatrix}$$

6-2matrix multiplication 矩陣相乘

矩陣相乘的先決條件為 A 之行數 =B 之列數

$A=\left[a_{jk}\right]m\times \underset{=}{n}$矩陣 $B=\left[b_{jk}\right]\underset{=}{r}\times p$矩陣

n= r 成立，方可相乘

AB=C $C_{jk}=\sum_{l=1}^{n}a_{jl}b_{lk}=a_{j1}b_{l1}+a_{j2}b_{l2}+\cdots+a_{jn}b_{nk}$

＊矩陣相乘

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times2+1\times1\\ 2\times1+0\times2+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}_{2\times1}$$

B_{3x1} A_{2x3} →不存在(沒有定義)

AB≠BA

AB= 0 不代表 A= 0 或 B= 0

Ex: $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

AB=AC ⇒ B= C (不成立)

＊ Linear Transformation (線性轉換)

$$Y=AX\Rightarrow\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$X=BW\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}$$

Y=AX=A(BW)=(AB)W=CW
(C=AB)

Matrix determinants(矩陣行列式)

由矩陣 A 之元素所形成之行列式

Determinants 行列式值

D=detA=$|A|$ **A=**$\lfloor a_{jk}\rfloor_{m\times n}$矩陣

二階行列式$(2\times2$矩陣$)$**D=detA=**$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

三階行列式$(3\times3$矩陣$)$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

四階行列式$(4\times4$矩陣$)$

D= detA

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}$$

行列式之一性值：

(i) 行列式可換行或換列，其行列式絕對值不變。

(ii)若有二行或三行元素成比例，其行列式值為零。

Ex:

$$D=\begin{vmatrix}1&3&0\\2&6&4\\-1&0&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}6&4\\0&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&4\\-1&2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}2&6\\-1&0\end{vmatrix}$$

$$=12-3(4+4)+0(0+6)=-12$$

6-3Linear Systems of Equations Gauss Elimination 高斯消去法

Linear System

$\boxed{Ax=b}$

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n&=b_2\\\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad&\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times\underline{\underline{n}}}\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}_{\underline{\underline{n}}\times1}\cdot B=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}_{m\times1}$$

＊ 矩陣列運算等同於消去法

矩陣列運算(reduced matrix)簡化矩陣基本列運算，對 A 之諸列向量之處理有三種基本運算

(i) 列調運算 r_{ij}(表示 i 列和 j 列互調)

(ii) 倍乘運算 r_i^k (表示 i 列×k 倍)

(iii) ★加入運算 $r_i{}^k{}_j$ (k≠0)

(i 列×k 倍加入 j 列)

Ex:

$$\begin{aligned}3x_1+4x_2&=7\\2x_1+3x_2&=1\end{aligned}\qquad \text{化為單位矩陣}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&4&7\\2&3&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_{12}^{-\frac{2}{3}}}\left[\begin{array}{cc|c}3&4&7\\0&\frac{1}{3}&-\frac{11}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{r_2^{3}}\left[\begin{array}{cc|c}3&4&7\\0&1&-11\end{array}\right]\xrightarrow{r_{21}^{-4}}\left[\begin{array}{cc|c}3&0&51\\0&1&-11\end{array}\right]\xrightarrow{r_1^{\frac{1}{3}}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&17\\0&1&-11\end{array}\right]$$

$X_1=17$

$X_2=-11$

＊Linear Independence and Dependence of Vectors 線性獨立和相依之向量

有一$a_1,a_2\cdots a_m$之向量組合，若$c_1,c_2\cdots c_m$為不全為零的數

且方程式 $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_m a_m = 0$

則稱 $(a_1, a_2 \cdots a_m)$ 為一$\boxed{\text{線性相依}}$組合

若 $(a_1, a_2 \cdots a_m)$ 中沒有向量可由其他向量組合而成，則為$\boxed{\text{線性獨立}}$。

Ex1: i, j, k,-i+4j-3k

C_1i+C_2j+C_3k+C_4(-i+4j-3k)= 0

C_1=1

C_2=-4　　　　　　＊ -i+4j-3k 可由其他向量所組合而成

C_3= 3　　　　　　　故此向量組為線性相依

C_4=1

亦可用行列式判斷是否為線性相依或線性獨立

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

＝0 故為線性相依

≠0 則為線性獨立

Ex2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 A + c_2 B + c_3 C = 0$$

$$\Rightarrow 2A - B - C = 0$$

故為線性相依

可用行列式值判斷

$$[A, B, C] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 8 \qquad \Rightarrow \text{線性相依}$$

任一實數方陣 A 可變成一對稱矩陣 R 和一反對稱矩陣 S 之和。

$$R = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \qquad S = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \qquad \Rightarrow R + S = A$$

Rank a Matrix(矩陣之秩)

矩陣 A=$\lfloor a_{jk} \rfloor$ 之最大獨立列向量之個數

即為秩(Rank)或因次(Dimension)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}(r_{13}^{-1})} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$,故 Rank 為 2

Rank of a Matrix (矩陣之秩)

＊於一(m×n)矩陣 A 中有一（r×r）$[r \le m及n]$ 之矩陣之行列市值不為零，而所有 $(r+1)\times(r+1)$之部分矩陣行列式均為零，則矩陣之 Rank 為 r。

Ex:

1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{13}^{-1}, r_{23}^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{21}^{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   有兩個獨立之列向量，故 RankA=2

2. $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}_{3\times 3} = 0$ $\quad 2\times 2$的部份矩陣$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \ne 0$

故 RankA=2

Ex:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ 求RankA

所有 3×3 矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

之行列式值均為零

任一 2×2 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4-6 = -2 \ne 0$

故 RankA=2

Linear System of Equation

AX=B ,$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

定義：Augumented matrix $\tilde{A}=[A|b]$

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)}$$

若 RankA=Rank($\tilde{A}$)有解

→ 1. 若 A 為 n×n 矩陣, Rank(A)=Rank($\tilde{A}$)=n

則有單一解(n= r) 設 r 為獨立列向量個數

2.若 n ＞r 則有無限多組解 (m×n 矩陣)

3.若 Rank(A)＜Rank($\tilde{A}$)無解

Ex1-1:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=7 \\ 2.25x_1+3x_2=5.25 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Rank(A)=0$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 5.25 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_{12}^{-0.75}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Rank(\tilde{A})=1$$

因$\mathrm{Rank}(\mathrm{A})=\mathrm{Rank}(\tilde{\mathrm{A}})$,故有解

但$r=1$(獨立列向量個數)$< n=2$(未知數個數)為無限多組解

Ex1-2:

$$\begin{cases} 3\mathrm{X}_1+4\mathrm{X}_2=7 \\ 2.25\mathrm{X}_1+3\mathrm{X}_2=1 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{RankA}=1$$

$$\tilde{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 5.25 \end{bmatrix}\xrightarrow{\mathrm{r}_{12}^{-0.75}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -4.25 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Rank}(\tilde{\mathrm{A}})=2>\mathrm{Rank}(\mathrm{A})=1$ 無解(矛盾方程式)

Ex1-3:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(\tilde{A}) = 2, \text{單一組解}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -11 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = 17, x_2 = -11$$

Solve System of Linear System(解出線性系統方程式)

(i) Guass elimination (高斯消去法)

(ii) Cramer rule (n 個方程,n 個未知數)

$Ax = b$ 且有單一組解

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{則 } x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ b_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$x_2 = \cdots$

$x_n = ?$

(i)Gauss elimination (高斯消去法)

Ex2: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases}$ 利用列運算方式求解

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{V_{12}^{-2}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2^{-\frac{1}{7}}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{21}^{-5}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1^{\frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$x_1 = 6, \quad x_2 = -2$

Ex3:Ax=b

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}3&2&2&-5&8\\0.6&1.5&1.5&-5.4&2.7\\1.2&-0.3&-0.3&2.4&2.1\end{array}\right]\xrightarrow{r_{12}^{-\frac{1}{5}},r_{13}^{-\frac{2}{5}}}\left[\begin{array}{cccc|c}3&2&2&-5&8\\0&1.1&1.1&-4.4&1.1\\0&-1.1&-1.1&4.4&-1.1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{23}^{1}}\left[\begin{array}{cccc|c}3&2&2&-5&8\\0&1.1&1.1&-4.4&1.1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{2}^{\frac{1}{1.1}}}\left[\begin{array}{cccc|c}3&2&2&-5&8\\0&1&1&-4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{21}^{-2}}\left[\begin{array}{cccc|c}3&0&0&3&6\\0&1&1&-4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{1}^{\frac{1}{3}}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&2\\0&1&1&-4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

故 $x_1+x_4=2\Rightarrow x_1=2-x_4$

$x_2+x_3-4x_4=1\Rightarrow x_2=1-x_3+4x_4$

無限多組解$\left(x_3,x_4\text{確定},x_1,x_2\text{為唯一解}\right)$

Ex4:(HW)

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=2\\3x_1-x_2+x_3=6\\-x_1+3x_2+4x_3=4\end{cases}\qquad \tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&2&2\\3&-1&1&6\\-1&3&4&4\end{array}\right]\qquad Ans: x_1=1\qquad x_2=-1\qquad x_3=2$$

Ex5:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=3\\2x_1+x_2+x_3=0\\6x_1+2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&1&3\\2&1&1&0\\6&2&4&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{12}^{-\frac{2}{3}},r_{13}^{-2}}\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&1&3\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-2\\0&-2&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_{23}^{-6}}\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&1&3\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-2\\0&0&0&12\end{array}\right]$$

矛盾方程式(無解)

$Rank(A)=2$

$Rank(\tilde{A})=3$

$Rank(\tilde{A})>Rank(A)\to$ 無解

Vector-space(向量空間) Dimension (因次) Basis (基底)

Dimension (因次)：最大線性獨立之向量個數

Basis：一線性獨立之組 V 包含最大可能向量之數目

Ex1:所有向量為 R^3，使得 $2V_1+3V_3=0, V_3=-\frac{2}{3}V_1$

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(v_1, v_2, -\frac{2}{3}v_3\right) = v_1\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right) + v_2(0, 1, 0)$$

則$[-3, 0, 2], [0, 1, 0]$為基底，因次為 2

Ex2:在 R^3 之空間以 i、j、k 為基底。

Ex3:所有向量為 R^3 之空間，使得 2x+3z=0

$$z = -\frac{2}{3}x,\quad (x, y, z) = \left(x, y, -\frac{2}{3}x\right) = x\left(1,\ 0,\ -\frac{2}{3}\right) + y(0,\ 1,\ 0)$$

則$\left[1,\ 0,\ -\frac{2}{3}\right], [0,\ 1,\ 0]$ 為基底

6-6 Determinants , Cramer's Rule (行列式值)

A 為方陣(square matrix)

$D = \det A = |A|$, $A = [a_{jk}]_{m \times n}$ 矩陣

↘A 之行列式值

2×2 矩陣(二階行列式值) $D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3×3 矩陣(三階行列式值)

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

＊ D= det A = 0 (singular matrix) 奇異矩陣

→不能做反矩陣。裡面的某些列向量不是獨立，線性相依。

＊行列式之一般性質：

(i) 行列式可換航或換列，其行列式絕對值不變

(ii) 若有二行或二列元素成正比，其行列式值為零 (∵線性相依)

＊行列式不管經過幾次列運算，其值不變。

Ex:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 3(4+4) + 0 = -12$$

＊常見行列式值之性質：

AB≠BA

(i) $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$

(ii)$\det A^T = \det A$ ($|A^T| = |A|$)

Ax = b

$A^{-1}Ax=A^{-1}b$ A 有反矩陣之條件：1.需為方陣

$x=A^{-1}b$ 2.det A≠0

6-7 Inverse of a Matrix (反矩陣) , Gauss-Jordan Elimination

若 A 為以 n×n 矩陣, 且 detA≠0 (det A= 0, singular matrix)

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$(A^{-1} 為反矩陣)

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left[adj\ A_{jk}\right]^{T}$$

↘從屬矩陣(adjoint matrix)

(Rank A = n 或 det A≠0 為必要條件) det=0,則 RankA≠n

2×2 矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\ ,\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} |a_{22}| & -|a_{21}| \\ -|a_{12}| & |a_{11}| \end{bmatrix}^{T}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Diagonal matrix (對角矩陣)

$$A=D=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\ ,\ A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

3×3 matrix (矩陣)

Ex:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\ ,\ \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left[\mathrm{adj}A\right]^{T}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 7 & -14 & -7 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathrm{adj}A\right]^{T}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 8 & -14 & 5 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 7 & -14 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

＊反矩陣之性質公式

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$

$AC(AC)^{-1} = I$

$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

linear system 之應用

$Ax=b$

$A^{-1}Ax= A^{-1}b$

$\Rightarrow x=A^{-1}b$

$$[A|I] \xrightarrow{\text{乘}A^{-1}} [A^{-1}A|A^{-1}I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

利用 Gauss-Jordan Elimination 求 A^{-1}

Ex 2:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$,求 A^{-1}

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{12}^{3},\,r_{13}^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{23}^{-1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{1}^{-1},\,r_{2}^{0.5},\,r_{3}^{-0.2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{31}^{2},\,r_{32}^{-3.5}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{21}^{1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

故得 $A^{-1}=\begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & -0.4 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$,check $AA^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$