美國 ARML 競賽甄選第一階段參考解答

(88 年 12 月 11 日上午 10:00-12:00)

一、填充題：

1. 128°
2. $\sqrt[3]{\dfrac{2000}{1999}}$
3. 5
4. 3
5. 4659
6. –10
7. 5
8. 13

二、計算證明題：

1. 由題意，$a_1=1$，$a_2=3$，得 $S_1=a_1=1$，$S_2=a_1+a_2=4$，因此 $k=1$ 時，所欲證明的兩個等式均成立.

假設 $k\ge 1$ 且 $S_{2k-1}=\frac{1}{2}k\left(4k^2-3k+1\right)$，則

$$S_{2k}=S_{2k-1}+a_{2k}=\frac{1}{2}k\left(4k^2-3k+1\right)+3k^2=\frac{1}{2}k\left(4k^2-3k+1+6k\right)=\frac{1}{2}k\left(4k^2+3k+1\right)$$

假設 $k\ge 1$ 且 $S_{2k}=\frac{1}{2}k\left(4k^2+3k+1\right)$，則

$$\begin{aligned}
&S_{2(k+1)-1}\\
&=S_{2k+1}\\
&=S_{2k}+a_{2k+1}\\
&=\left[\frac{1}{2}k\left(4k^2+3k+1\right)\right]+3(k+1)k+1\\
&=\frac{1}{2}\left(4k^3+9k^2+7k+2\right)\\
&=\frac{1}{2}(k+1)\left(4k^2+5k+2\right)\\
&=\frac{1}{2}(k+1)\left[4(k+1)^2-3(k+1)+1\right]
\end{aligned}$$

由數學歸納法得證。

2. 不失一般性, 可以假設 P 點在弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上. 設 D 在 $\overset{\frown}{BC}$ 且 $\overline{AD}$ 為圓 O 的一直徑. 注意到

ΔBPC 面積 $\leq \Delta BDC$ 面積, 而得 $\overline{PB}\times\overline{PC}\sin\angle BPC \leq \overline{DB}\times\overline{DC}\sin\angle BDC$, 由於 $\angle BPC$ 與 $\angle BDC$ 有相同的圓周角, $\angle BDC = \angle BPC$, 得 $\overline{PB}\times\overline{PC} \leq \overline{DB}\times\overline{DC}$. 其次, 注意到 $\overline{PA} \leq \overline{DA}$, 因此 $\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC} \leq \overline{DA}\times\overline{DB}\times\overline{DC}$. 由於 $\overline{DA}\times\overline{DB}\times\overline{DC} = 2\times 2^2\cos^2 60^\circ$, 得 $\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC}$ 的最大值為 2.

3. 共有 $6\times5\times5\times4\times4\times4 = 9600$ 種方法. 理由如下:

B 點有 6 種選擇

A, D 點有 5 種選擇 (只要與 B 不同色),

C, F 點有 4 種選擇 (F, C 與 B, D 都不同色),

E 點有 4 種選擇 (E 與 F, D 都不同色).