美國 ARML 競賽甄選第二階段參考解答

(89 年 3 月 11 日上午 10:00-12:00)

一、填充題

1. $(x,y)=(5,2),\left(5+3\sqrt{2},5-3\sqrt{2}\right)$
2. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
3. 2000.5
4. $\dfrac{1}{1+1999000}$
5. 9
6. C^{1901}_{100}
7. 55
8. 188

二、計算證明題

1. 設 $8p+9=m^2$，$m>3$，則 $8p=m^2-9=(m+3)(m-3)$. 因 p 為質數，得 $p \mid m+3$ 或 $p \mid m-3$. 當 $p \mid m+3$ 時，表 $m+3=kp$，得 $8p=kp(m-3)$，故 $8=k(m-3)$. 由此得 $m-3=1,2,4$ 或 8，即 $m=4,5,7$ 或 11. 代入檢驗得 $p=2$ 或 5. 當 $p \mid m-3$ 時，同理可得 $m+3=8$，從而得 $p=2$，因此 $p=2$ 或 5 或為所求.

2. 由切割線定理得 $\overline{AE}\cdot\overline{AF}=\overline{AD}^2$. 因 K 為 $\overline{AD}$ 的中點，D 為 $\overline{AB}$ 的中點，故 $\overline{AK}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot 2\overline{AD}=\overline{AD}^2$. 從而得 $\overline{AE}\cdot\overline{AF}=\overline{AK}\cdot\overline{AB}$. 因此 ΔAEK 與 ΔABF 相似，而得 $\angle AEK=\angle ABF$. 故 E，K，B，F 四點共圓.

3. 顯然，$1>nr_i-[nr_i]\geq 0$. 由此可得 $9>a_n=\sum_{i=1}^{9}\left(nr_i-[nr_i]\right)\geq 0$. 令 k 表示 $r_1,r_2,\cdots,r_9$ 的分母之最小公倍數，則 $[kr_i]=kr_i$，$i=1,2,\ldots,9$. 因而得 $a_k=0$，於是 A 的最小元素為 0. 又因為 $a_{k-1}=k-1-\sum_{i=1}^{9}[kr_i-r_i]=k-1-\sum_{i=1}^{9}(kr_i-1)=k-1-k+9=8$，故 A 的最大元素為 8.