2000 年美國 ARML 競賽甄選第二階段試題

(89 年 3 月 11 日上午 10:00~12:00)

一、 填充題：每格 8 分，請將答案寫在答案卷上不必列出演算過程。

1. 兩數 x，y，其中 $x>y$，且滿足 $\begin{cases} x+y+xy=17 \\ x^2y+xy^2=70 \end{cases}$，則 $(x,y)=$__________.

2. 以知圓 O 的直徑 $\overline{AB}$ 的長等於 2，半徑 $\overline{OD}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直，M 為 $\overline{OD}$ 的中點，連接 B，M 並延長交圓 O 於 C，則 $\overline{BC}$ 的長=__________.

3. $\dfrac{1}{2^{-2000}+1}+\dfrac{1}{2^{-1999}+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{-1}+1}+\dfrac{1}{2^{0}+1}+\dfrac{1}{2^{1}+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{1999}+1}+\dfrac{1}{2^{2000}+1}$ 之值為__________.

4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下:

   $a_0=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}\ (n=0,1,2,\cdots)$，則 $a_{2000}=$__________.

5. 若 a，b，c 為多項式 $x^3-2x^2-x+1=0$ 的三個根，則 $\dfrac{1-a}{1+a}+\dfrac{1-b}{1+b}+\dfrac{1-c}{1+c}$ 之值為__________.

6. 某校一年級有學生 2000 人，學號從 890001 編到 892000. 從這 2000 人中挑選 100 人，使得這 100 人中的學號沒有兩個人的學號相差 1 號的方法共有__________ 種.

7. 某一次競賽中，共有 33 為參賽者，假設競賽結果每一位參賽者獲得的分數都是非負的整數. 已知所有參賽者總得分數為 150 分，且任意 17 位參賽者的得分總和至少 50 分，則參賽者可能得到的最高分數為__________.

8. 若 $A=\left\{(a_1,a_2,a_3)\,\middle|\,a_1,a_2,a_3\text{為正整數且}a_1\mid a_2,\ a_2\mid a_3,\ a_3\mid 200\right\}$，則集合 A 的元素個數為__________.

二、 計算證明題：每題 12 分，請將演算過程寫在答案卷上。

1. 試求所有的質數 p 使得 $8p+9$ 為完全平方數.

2. 設 ΔABC 中 $\overline{CA}=\overline{CB}$，$\Delta ABC$ 的內切圓 O 與 $\overline{AB}$ 相切於點 D，過點 A 作一直線交圓 O 於兩相異點 E，F. 設 K 為 $\overline{AD}$ 的中點. 試證: E，K，B，F 四點共圓.

3. 給定正有理數 $r_1, r_2, \cdots, r_9$，滿足 $r_1+r_2+\cdots+r_8+r_9=1$. 對於任意正整數 n，令 $a_n=n-[n\cdot r_1]-[n\cdot r_2]-\cdots-[n\cdot r_8]-[n\cdot r_9]$，其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數. 試求 $A=\{\,a_n \mid n=1,2,\cdots\}$ 之最大與最小元素.