美國 ARML 競賽甄選第一階段試題

(88 年 12 月 11 日上午 10:00-12:00)

一、 填充題：每格 8 分，請將答案寫在答案卷上，不必列演算過程。

1. 設四邊形 $ABCD$ 內接於圓, $\overline{AB}$ 為圓的直徑. 若 $\angle ABD = 38^\circ$, 則 $\angle BCD =$________.

2. 方程式 $1999x^3 - [x] = 1999$ 的實數解為________. ($[x]$ 表示不大於 x 的最大整數, 即高斯函數)

3. 若對任意 n 個整數中, 都可找到三個數其和為 3 的倍數, 則最小的 n 是________.

4. 滿足 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1999}$ 之有序正整數對 (x, y) 總共有_________對.

5. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n + a_{n+4} = n^2$, 其中 n 為正整數. 已知 $a_{19} = 99$, 則 $a_{99} =$________.

6. 滿足 $x^2 - 2ax + 8x + 2a^2 - 4 = 0$ 有兩實根之各方程式中, 使其兩根之積有最大值時, $a =$________.

7. 設 $ABCD$ 為等腰梯形, 其中 $\overline{AB} // \overline{DC}$, 且 $\overline{AB} > \overline{DC}$. 已知 $\overline{BC} = 7$, $\overline{AC} = 8$, 且 $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ 均為**正整數,** 則 $\overline{AB} =$________.

8. 整數 $2^{70} + 3^{70}$ 的最小(正)質因數為________.

二、　計算證明題：每題 12 分，請將演算過程寫在答案卷上。

1. 已知數列$\langle a_n \rangle$定義如下:

$$a_n = \begin{cases} 3k\left(k-1\right)+1, & 當 n = 2k-1 時 \\ 3k^2 \quad\quad\quad\quad , & 當 n = 2k 時 \end{cases}$$

設 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

試證: 對所有自然數 k, 恆有 $S_{2k-1} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1)$, $S_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1)$.

2. 設圓 O 為單位圓, ΔABC 為圓 O 之內接正三角形. 若 P 為圓 O 上一動點, 試求 $\overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC}$ 的最大值.

3. 下圖中有六個頂點 A, B, C, D, E, F. 如今想把頂點染色, 而且使得有線段連接的兩個頂點的顏色都不相同. 若我們有六種不同顏色的油漆, 則共有多少種不同的塗色方法? (可以容許某些顏色的油漆不用)