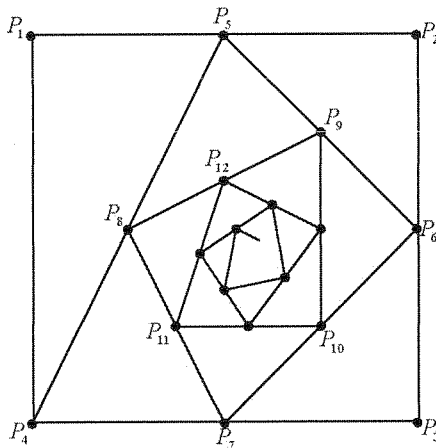


1. 座標平面上四點 $P_1(0,1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1,0)$, $P_4(0,0)$ 圍成一正方形。如下圖所示，假設 P_5 為 P_1P_2 之中點， P_6 為 P_2P_3 之中點， P_7 是 P_3P_4 之中點，以此步驟繼續下去可生成數列 $\{P_n\}$ ：



令 P_n 的座標為 (x_n, y_n) ，求

$$(x_{500} + 2x_{501} + 2x_{502} + 2x_{503})(2y_{504} + 4y_{505} + 4y_{506} + 4y_{507})$$

之值。

2. 設實數 a, b 滿足 $a + b = 2$ ，試求 $\sqrt{3a+1} + \sqrt{2b+\frac{1}{5}}$ 的最大值，並說明此時 a, b 之值。

3. 設 A, B, C, D 是四邊形 $ABCD$ 的四個內角。

證明：
$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}$$

4. 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 對所有實數 x 和對所有大於 10^8 的實數 y 恆有

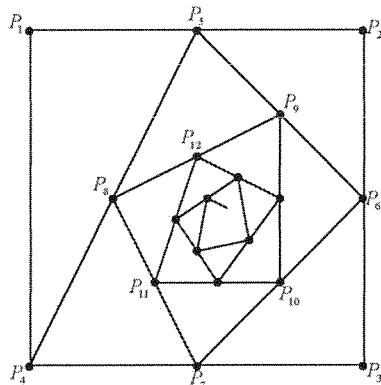
$$|f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)| \leq 0.2$$

試證明 f 對任意實數 x, y 恆滿足

$$|f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)| \leq 0.4$$

102 學年度台南區高級中學數學科能力競賽複賽試題（一）參考解答

1. 座標平面上四點 $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ 圍成一正方形。假設 P_5 為 P_1P_2 之中點, P_6 為 P_2P_3 之中點, P_7 是 P_3P_4 之中點。以此步驟繼續下去可生成一數列 $\{P_n\}$ (如圖所示)：



令 P_n 的座標為 (x_n, y_n) , 試求

$$(x_{500} + 2x_{501} + 2x_{502} + 2x_{503})(2y_{504} + 4y_{505} + 4y_{506} + 4y_{507})$$

之值。

解:依題意可知 P_n 為 $P_{n-4}P_{n-3}$ 之中點($n \geq 5$), 所以 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-4} + x_{n-3})$ for $n \geq 5$

5

首先證明對於所有 $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$

當 $n = 1$ 時, $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 + 1 + 0 = 2$

假設當 $n = k - 1$ 時成立, 亦即是 $\frac{1}{2}x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 2$, 則當 $n = k$ 時,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} &= \frac{1}{2}x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \frac{1}{2}(x_{k+3-4} + x_{k+3-3}) \\ &= \frac{1}{2}x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 2 \end{aligned}$$

同理可證, 對於所有 $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = \frac{3}{2}$

所以

$$(x_{500} + 2x_{501} + 2x_{502} + 2x_{503})(2y_{504} + 4y_{505} + 4y_{506} + 4y_{507}) = 4 \cdot 6 = 24$$

2. 設實數 a, b 滿足 $a + b = 2$, 試求 $\sqrt{3a+1} + \sqrt{2b+\frac{1}{5}}$ 的最大值, 並說明此時 a, b 之值。

解: 令 $\vec{u} = \left(\sqrt{a+\frac{1}{3}}, \sqrt{b+\frac{1}{10}} \right)$

$$\vec{v} = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$$

則

$$|\vec{u}| = \sqrt{a + \frac{1}{3} + b + \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{73}{30}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3a+1} + \sqrt{2b+\frac{1}{5}}$$

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$

$$\therefore \sqrt{3a+1} + \sqrt{2b+\frac{1}{5}} \leq \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{73}{30}} = \sqrt{\frac{73}{6}} \dots\dots\dots (*)$$

不等式(*)中等號成立

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a+\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{b+\frac{1}{10}}}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots (**)$$

等式(**) 可化簡為 $a - \frac{3}{2}b = -\frac{11}{60}$

$$\text{解 } \begin{cases} a+b=2 \\ a-\frac{3}{2}b=-\frac{11}{60} \end{cases} \quad \text{可求得 } \begin{cases} a=\frac{169}{150} \\ b=\frac{131}{150} \end{cases}$$

代入可計算出 $\sqrt{3a+1} + \sqrt{2b+\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{73}{6}}$

故當 $(a, b) = \left(\frac{169}{150}, \frac{131}{150}\right)$ 時, $\sqrt{3a+1} + \sqrt{2b+\frac{1}{5}}$ 有最大值 $\sqrt{\frac{73}{6}}$

3. A 、 B 、 C 、 D 是四邊形 $ABCD$ 的四個內角

證明： $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}$

證明： $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \dots\dots\dots (1)$

$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} = -2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C-D}{2} \dots\dots\dots (2)$

$(1)(2) \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C-D}{2} \right)$

$$= 4 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A+C-B-D}{4} \sin \frac{C+B-A-D}{4} \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin \frac{A+C-B-D}{4} = \sin \frac{2A+2C-360^\circ}{4} = \sin \left(\frac{A+C}{2} - 90^\circ \right) = -\cos \frac{A+C}{2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{同理} \sin \frac{C+B-A-D}{4} = -\cos \frac{B+C}{2} \dots\dots\dots (5)$$

$$(1)(2)(3)(4)(5) \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \cos D =$$

$$4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+B}{2}$$

4. 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 對所有實數 x 和對所有大於 10^8 的實數 y 恆有

$$|f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)| \leq 0.2$$

試證明 f 對任意實數 x, y 恆滿足

$$|f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)| \leq 0.4$$

證明：由題意知對所有實數 x 和對所有大於 10^8 的實數 y 恆有

$$|f(x+2y) - 2f(x+y) + f(x)| \leq 0.2 \dots\dots\dots(1)$$

任意給定實數 x, y

再取實數 $H > 10^8 + |y|$

$\therefore H > 10^8$, $H - y > 10^8$ 和 $H + y > 10^8$

(a) 在(1)中用 $x+2y-H$ 取代 x , 用 $H-y$ 取代 y 得

$$|f(x+H) - 2f(x+y) + f(x+2y-H)| \leq 0.2 \dots\dots\dots(2)$$

(b) 在(1)中用 $x+2y-H$ 取代 x , 用 H 取代 y 得

$$|f(x+2y+H) - 2f(x+2y) + f(x+2y-H)| \leq 0.2 \dots\dots\dots(3)$$

(c) 由(2)(3)得

$$\begin{aligned} & |2f(x+2y) - 2f(x+y) - f(x+2y+H) + f(x+H)| \\ & \leq |f(x+H) - 2f(x+y) + f(x+2y-H)| + |f(x+2y+H) - 2f(x+2y) + f(x+2y-H)| \\ & \leq 0.4 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

(d) 在(1)中用 $x-H$ 取代 x , 用 $H+y$ 取代 y 得

$$|f(x+2y+H) - 2f(x+y) + f(x-H)| \leq 0.2 \dots\dots\dots(5)$$

(e) 在(1)中用 $x-H$ 取代 x ，用 H 取代 y 得

$$|f(x+H)-2f(x)+f(x-H)| \leq 0.2 \quad \dots\dots\dots(6)$$

(f) 由(5)(6)得

$$\begin{aligned} & |-2f(x+y)+2f(x)+f(x+2y+H)-f(x+H)| \\ & \leq |f(x+2y+H)-2f(x+y)+f(x-H)| + |f(x+H)-2f(x)+f(x-H)| \\ & \leq 0.4 \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

(g) 由(4)(7)得

$$\begin{aligned} & |2f(x+2y)-4f(x+y)+2f(x)| \\ & \leq |2f(x+2y)-2f(x+y)-f(x+2y+H)+f(x+H)| \\ & \quad + |-2f(x+y)+2f(x)+f(x+2y+H)-f(x+H)| \\ & \leq 0.8 \end{aligned}$$

最後同 $\div 2$ 可得

$$|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)| \leq 0.4$$

(h) 由 x, y 的任意性知

$$|f(x+2y)-2f(x+y)+f(x)| \leq 0.4 \quad \text{對任意實數 } x, y \text{ 恆成立。}$$