

102 學年度北一區（花蓮高中）
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一：已知 x_1, x_2, \dots, x_n 為正數且 $\frac{1}{1+2x_1} + \frac{1}{1+2x_2} + \dots + \frac{1}{1+2x_n} = 1$ ，試證：

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^n。$$

(10 分)

問題二：設 a, n 為正整數，找出所有數對 (a, n) ，使得 $a^n + 3^n$ 能整除 $a^{n+1} + 2 \cdot 3^n$ 。

(12 分)

問題三：設 a, b, c, d 為實數且 $a \neq b, c \neq d$ ， $f(x), g(x)$ 為滿足 $f(a) = f(b)$ 及 $g(c) = g(d)$ 的實

係數二次多項式。已知 $f(x) - g(x)$ 為常數多項式，證明：

(1) $a + b = c + d$ 。 (4 分)

(2) $\frac{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c) - g\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$ 。 (8 分)

問題四：師大數學系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：

(1) 四件作品的得票情形共有幾種？ (4 分)

(2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分布有幾種？ (8 分)

102 學年度北一區 (花蓮高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試 (一)【參考解答】

問題一：已知 x_1, x_2, \dots, x_n 為正數且 $\frac{1}{1+2x_1} + \frac{1}{1+2x_2} + \dots + \frac{1}{1+2x_n} = 1$ ，試證：

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^n。$$

【證明】：

$$\text{設 } y_i = \frac{1}{1+2x_i}, 1 \leq i \leq n$$

由 $y_1 + \dots + y_n = 1$ 及算幾不等式，得

$$1 - y_i = \sum_{j \neq i} y_j \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\prod_{j \neq i} y_j}, 1 \leq i \leq n$$

將這 n 個不等式相乘，得

$$(1 - y_1) \cdots (1 - y_n) \geq (n-1)^n \sqrt[n]{(y_1 \cdots y_n)^{n-1}} = (n-1)^n y_1 \cdots y_n$$

$$\Rightarrow \frac{1-y_1}{y_1} \cdot \frac{1-y_2}{y_2} \cdots \frac{1-y_n}{y_n} \geq (n-1)^n$$

$$\text{由 } \frac{1-y_i}{y_i} = 2x_i, \text{ 得 } 2^n (x_1 x_2 \cdots x_n) \geq (n-1)^n$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^n$$

問題二：設 a, n 為正整數，找出所有數對 (a, n) ，使得 $a^n + 3^n$ 能整除 $a^{n+1} + 2 \cdot 3^n$ 。

【解答】：

(1) $n=1$ ：

$$a+3 \text{ 整除 } a^2+6=(a+3)(a-3)+15$$

$$\Leftrightarrow a+3 \text{ 整除 } 15$$

$$\Leftrightarrow a=2, 12$$

$$\therefore (2, 1), (12, 1) \text{ 為解}$$

(2) $n \geq 2$ ：

$$a=1 \text{ 時, } 1+3^n < 1+2 \cdot 3^n < 2(1+3^n)$$

此時 $1+3^n$ 不能整除 $1+2 \cdot 3^n$

$$a=2 \text{ 時, } \because 2^{n+1}+2 \cdot 3^n = 2(2^n+3^n)$$

$\therefore (2, n)$ 為解

$$a=3 \text{ 時, } 2(3^n+3^n) < 3^{n+1}+2 \cdot 3^n < 3(3^n+3^n)$$

$\therefore 3^n+3^n$ 不能整除 $3^{n+1}+2 \cdot 3^n$

$$a \geq 4 \text{ 時, 先證: } a^n+3^{n+1}-3^n a > 0, \text{ 即 } \left(\frac{a}{3}\right)^n + 3 - a > 0$$

$$\text{顯然 } \left(\frac{a}{3}\right)^n + 3 - a > \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3 - a > 0$$

當 $n \geq 2$ 時上式成立。

$$\text{因此 } (a-1)(a^n+3^n) = a^{n+1}+3^n a - a^n - 3^n < a^{n+1}+2 \cdot 3^n < a(a^n+3^n)$$

$\therefore a^n+3^n$ 不能整除 $a^{n+1}+2 \cdot 3^n$

Ans: $(12, 1)$ 及 $(2, n)$, n 為任意正整數

問題三：設 a, b, c, d 為實數且 $a \neq b, c \neq d$, $f(x), g(x)$ 為滿足 $f(a)=f(b)$ 及 $g(c)=g(d)$ 的實

係數二次多項式。已知 $f(x)-g(x)$ 為常數多項式，證明：

$$(1) \quad a+b=c+d \quad .$$

$$(2) \quad \frac{f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{g(c)-g\left(\frac{c+d}{2}\right)} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 .$$

【證明】：

$$(1) \text{ 依題意, 可設 } f(x)=r(x-a)(x-b)+s, g(x)=r'(x-c)(x-d)+s' .$$

因為 $f(x)-g(x)$ 是常數多項式，所以比較一、二次項係數知

$$r=r', r(a+b)=r'(c+d),$$

得 $a+b=c+d$ 。

$$(2) \text{ 由 } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -r \frac{(a-b)^2}{4} + s = -r \frac{(a-b)^2}{4} + f(a) \text{ 得}$$

$$r = \frac{4\left(f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(a-b)^2},$$

故得證。

註：1°也可利用對稱性知 $y=f(x)$ 的頂點之 x 軸坐標為 $\frac{a+b}{2}$ ， $y=g(x)$ 的頂點之 x 軸

坐標為 $\frac{c+d}{2}$ ，而得證。

2°亦可用插值多項式證明。

問題四：師大數學系舉辦系徽設計比賽，入圍決選的有四件作品，由 10 名學生代表進行不記名投票，每人投兩票，且兩票須投不同作品。在沒有廢票的情況下，試問：

(1) 四件作品的得票情形共有幾種？

(2) 得票數最高的作品恰有一件的票數分布有幾種？

【解答】：

(1) 由題意可以知道：

① 四件作品所得的總票數為 20 票。

② 每件作品最多可以得到 10 票。

令四件作品的得票數分別為 x, y, z, u ，由①②可得

$$x + y + z + u = 20, 0 \leq x, y, z, u \leq 10.$$

因為 $0 \leq x, y, z, u \leq 10$ ，所以 H_{20}^4 須扣掉 $11 \leq x, y, z, u \leq 20$ 的情況。由 $x + y + z + u = 20$ 且 $x, y, z, u \geq 0$ 可知最多只有一個票數會大於等於 11，假設 $x \geq 11$ ，令 $x = x' + 11$ ，可得

$$x' + y + z + u = 9, 0 \leq x', y, z, u \leq 9,$$

此情況有

$$H_9^4 = C_9^{12} = 220 \text{ 種。}$$

因此票數分布為

$$H_{20}^4 - 4 \times H_9^4 = 1771 - 4 \times 220 = 891 \text{ 種。}$$

(2) 假設得票數最高為 x ，由題意可得

$$x + y + z + u = 20, 0 \leq y, z, u < x \leq 10,$$

因為 $y, z, u < x$ ，也就是 $y, z, u \leq x-1$ ，所以

$$x + y + z + u \leq x + (x-1) + (x-1) + (x-1) = 4x - 3。$$

由 $x + y + z + u = 20$ 得

$$20 \leq 4x - 3，$$

即

$$\frac{23}{4} \leq x。$$

因此，當 $x \geq 6$ 時，才會滿足只有一件作品得票數最高且票數為 x 。

當 $x = 6$ 時，

$$y + z + u = 14, 0 \leq y, z, u \leq 5$$

滿足此情況的 y, z, u 有 $(5, 5, 4), (5, 4, 5), (4, 5, 5)$ 3 種。

當 $x = 7$ 時，

$$y + z + u = 13, 0 \leq y, z, u \leq 6$$

因為 $y + z + u = 13$ 且 $y, z, u \geq 0$ ，所以 y, z, u 最多只有一個會大於等於 7。

由(1)可知滿足此情況有

$$H_{13}^3 - 3 \times H_6^3 = C_{13}^{15} - 3 \times C_6^8 = 105 - 84 = 21 \text{ 種。}$$

同理

當 $x = 8, 9, 10$ 時， y, z, u 最多只有一個會大於等於 8, 9, 10，故

當 $x = 8$ 時，有

$$H_{12}^3 - 3 \times H_4^3 = C_{12}^{14} - 3 \times C_4^6 = 91 - 45 = 46 \text{ 種。}$$

當 $x = 9$ 時，有

$$H_{11}^3 - 3 \times H_2^3 = C_{11}^{13} - 3 \times C_2^4 = 78 - 18 = 60 \text{ 種。}$$

當 $x = 10$ 時，有

$$H_{10}^3 - 3 \times H_0^3 = C_{10}^{12} - 3 \times C_0^2 = 66 - 3 = 63 \text{ 種。}$$

因此滿足只有一件作品得票數最高的情形有

$$4 \times (3 + 21 + 46 + 60 + 63) = 772 \text{ 種。}$$