102學年度高屏區高級中學數學科能力競賽試題（一）

注意事項：（1）作答時間：2小時。不可使用電算器。

（2）本試卷共五題，滿分49分。每題配分標於題末。計算、證明題請務必依序寫在答案卷上。同時必須寫出演算過程或理由。

（3）試題紙與答案卷請一併繳回。

1. 設 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{2}$、$\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{2}{3}$，試求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

（9分）

2. 已知一圓的圓心為 O 點，且 $\overline{AB}$ 為此圓的直徑，如果 $\overline{CD}$ 為一弦且垂直 $\overline{AB}$ 於 E 點，又 $\overline{AB}$ 的長度為二位整數，$\overline{CD}$ 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數，試求 $\overline{AB}$ 的長度。（10分）

3.在 ΔABC 中，令 $\overline{BC}=a$、$\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$ 且 $s=\frac{a+b+c}{2}$，

試證：$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$。（10分）

4. 已知正實數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2+c^2=3$，試證：

$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geq 1$（10分）

5. 已知 $f(x)$ 為 n 次多項式，其各項的係數都是非負的整數，如果 $f(1)=6$，$f(7)=3438$，試求 n 之值及 $f(2)$。（10分）

試題（一）參考解答

1. 設 $\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$、$\cos\alpha-\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

【參考解答】 設 $x_1=\cos\alpha$、$y_1=\sin\alpha$、$x_2=\cos\beta$、$y_2=\sin\beta$，

則點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 在單位圓 $x^2+y^2=1$ 上。

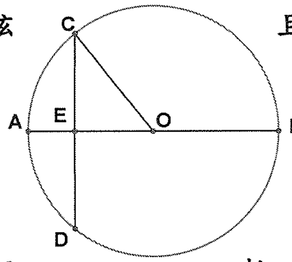
又 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=-\dfrac{3}{4}$，

因此令直線 AB 的方程式為 $y=-\dfrac{3}{4}x+b$。

現在將 $y=-\dfrac{3}{4}x+b$ 代入 $x^2+y^2=1$，得 $\dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{3b}{2}x+(b^2-1)=0$，由根與係數關係可得 $x_1x_2=\dfrac{16(b^2-1)}{25}$。 同理，可得 $y_1y_2=\dfrac{16b^2-9}{25}$。

所以，$\underline{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=x_1x_2-y_1y_2=-\dfrac{7}{25}}$。

2. 已知一圓的圓心為 O 點，且 $\overline{AB}$ 為此圓的直徑，如果 $\overline{CD}$ 為一弦且垂直 $\overline{AB}$ 於 E 點，又 $\overline{AB}$ 的長度為二位整數，$\overline{CD}$ 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數，試求 $\overline{AB}$ 的長度。



【參考解答】：令 $\overline{AB}=10a+b$，其中 a,b 為異於 **0** 的數字。

所以 $\overline{CD}=10b+a$，本題欲求 a,b 值，使得 $\overline{OE}$ 的長度為正有理數。

在直角三角形 CEO 中，

$$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CE}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(10a+b)^2-(10b+a)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{11(a^2-b^2)}$$

因此，當 $11(a^2-b^2)$ 為完全平方數時，$\overline{OE}$ 的長度為正有理數。

令 $a^2-b^2=11n^2\Rightarrow(a,b)=(6,5)$ 滿足題意。

3. 在 ΔABC 中，令 $\overline{BC}=a$、$\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$ 且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，

試證：$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$。

【參考解答】：$a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2abc}\left[a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2abc}\left[16s(s-a)(s-b)(s-c)\right]$$

$$=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

4.已知正實數a,b,c 滿足$a^2+b^2+c^2=3$，試證：

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geq 1 \quad 。$$

【參考解答】

將上式不等式兩邊同乘以$(1+2ab)(1+2bc)(1+2ca)$，因此上式成立

$\Leftrightarrow 1+ab+bc+ca\geq 4a^2b^2c^2$。由題意知

$$a^2+b^2+c^2=3\Rightarrow 1=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\leq 1$$

$$\because a^2b^2c^2=(abc)^2\leq\sqrt{abc},\quad \therefore\frac{1+ab+bc+ca}{4}\geq\sqrt[4]{a^2b^2c^2}=\sqrt{abc}\geq a^2b^2c^2$$

故得證。

5. 已知$f(x)$為n次多項式，其各項的係數都是非負的整數，如果$f(1)=6$，$f(7)=3438$，試求n之值及$f(2)$。

【參考解答】 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，$\because$ $f(1)=6$ ，

得知係數 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$，

又 $f(7)=a_n7^n+a_{n-1}7^{n-1}+\ldots+a_17+a_0=3438$…… (A)，

將 3438 表成 7 進位數 $\rightarrow$ $3438=1\times 7^4+3\times 7^3+1\times 7+1$…… **(B)**，

(A)、(B) 兩式比較得： $f(x)=x^4+3x^3+x+1$ $\rightarrow$ $\boxed{f(2)=43}$。

註：因為$3438=f(7)=a_n7^n+a_{n-1}7^{n-1}+\ldots+a_17+a_0\geq a_n7^n\Rightarrow n\leq 4$，

如果$n=3\Rightarrow$

$3438=f(7)=a_3\times 7^3+a_2\times 7^2+a_1\times 7+a_0\leq 6\times 7^3+6\times 7^2+6\times 7+6=2400$(不合)

因此$n=4$。