一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　筆試（一）　編號：________

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 m, n 均為正整數且滿足不等式 $\frac{6}{11} < \frac{3n}{3n+2m} < \frac{5}{9}$，若給予一個定數 n，則只有唯一的一個數 m，使得不等式成立，求 n 的最大數及最小數為何？

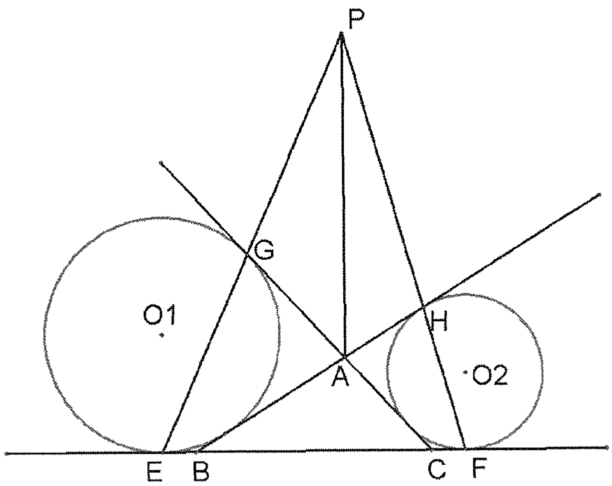
二、某運動會開了 n 天，共發出 m 面獎牌，其中 $n \geq 3$。第一天發出 2 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第二天發出 4 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第三天發出 6 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，以此類推，至最後的第 n 天發出的 $2n$ 面獎牌剛好將所有的獎牌全部發完。試問運動會共開了幾天？共發出了幾面獎牌？

三、設 $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$，令 $f(a) = a_1$，$0 < a < 4$，且 $f(a_n) = a_{n+1}$，$n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

試證 $a_{n+1} \geq a_n$

四、如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 和 ΔABC 三邊所在的 3 條直線都相切，E, F, G, H 為切點，直線 EG 與直線 FH 交於點 P。

求證：直線 PA 垂直直線 BC。



一百零貳學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區）　　筆試（一）{參考解答}

一、設 m,n 均為正整數且滿足不等式 $\frac{6}{11}<\frac{3n}{3n+2m}<\frac{5}{9}$，若給予一個定數 n，則只有唯一的一個數 m，使得不等式成立，求 n 的最大數及最小數為何？

【參考解答】$\frac{6}{11}<\frac{3n}{3n+2m}<\frac{5}{9}$

$\frac{9}{5}<1+\frac{2m}{3n}<\frac{11}{6}$，$\frac{6}{5}n<m<\frac{5}{4}n$

$\frac{5}{4}n-\frac{6}{5}n\leq 2$，所以 $n\leq 40$

若 $n=40$，$48<m<50$，所以 $m=49$

代入 $n=9$，$\frac{54}{5}<m<\frac{45}{4}$，所以 $m=11$

故 n 的最大數為 40，最小數為 9

二、某運動會開了 n 天，共發出 m 面獎牌，其中 $n\geq 3$。第一天發出 2 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第二天發出 4 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，第三天發出 6 面獎牌加上剩下獎牌的 $\frac{1}{5}$，以此類推，至最後的第 n 天發出的 $2n$ 面獎牌剛好將所有的獎牌全部發完。試問運動會共開了幾天？共發出了幾面獎牌？

【參考解答】設第 k 天共發出 a_k 面獎牌。

可知 $a_1=2+\frac{1}{5}(m-2)=\frac{1}{5}(m+8)$

$$a_k=2k+\frac{1}{5}(m-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}-2k)$$

$$a_{k+1}=2(k+1)+\frac{1}{5}(m-a_1-a_2-\cdots-a_k-2(k+1))$$

$$a_n=2n+\frac{1}{5}(m-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}-2n)=2n$$

相減可得 $a_{k+1}-a_k=2+\frac{1}{5}(-a_k-2)$，即 $a_{k+1}=\frac{4}{5}a_k+\frac{8}{5}$，$a_{k+1}-8=\frac{4}{5}(a_k-8)$。

所以 $a_k-8=\frac{4}{5}(a_{k-1}-8)=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}(a_1-8)=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}(m-32)$，

$$m=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{5}(m-32)\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right)+8n$$

$$=(m-32)\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)+8n\text{ 。}$$

解得 $m=\left(\frac{5}{4}\right)^n(8n-32)+32=\frac{5^n}{4^{n-1}}(2n-8)+32$ 。

因 m 為整數且 5^n 與 4^{n-1} 互質，可知 $4^{n-1}\mid 2n-8$ 。

若 $n\ge 3$ ，則 $4^{n-1}>|2n-8|$ 。可解得 $n=1,2$ 或 4。

只有 $n=4$ 滿足條件，此時 $m=32$ 。

三、設 $f(x)=2x-\frac{1}{2}x^2$，令 $f(a)=a_1$ ，$0<a<4$ ，且 $f(a_n)=a_{n+1}$ ，$n=1,2,3,4,\ldots..$

試證 $a_{n+1}\ge a_n$

【參考解答】 $f(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

$f(0)=f(4)=0$, $f(x)$ 在 2 有最大值為 2

即 $0<x<4$ ，則 $0<f(x)\le 2$

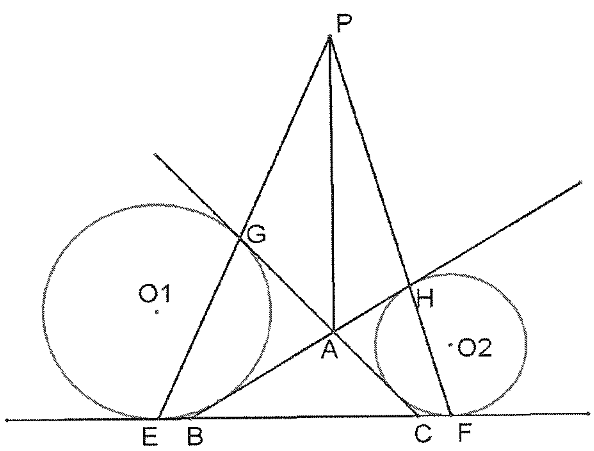
$f(a)=a_1$ ，$0<a<4$ ，所以 $0<a_1\le 2$

$a_2=f(a_1)$ ，所以 $0<a_2\le 2,\ldots\ldots\ldots,0<a_n\le 2,\ldots\ldots\ldots$

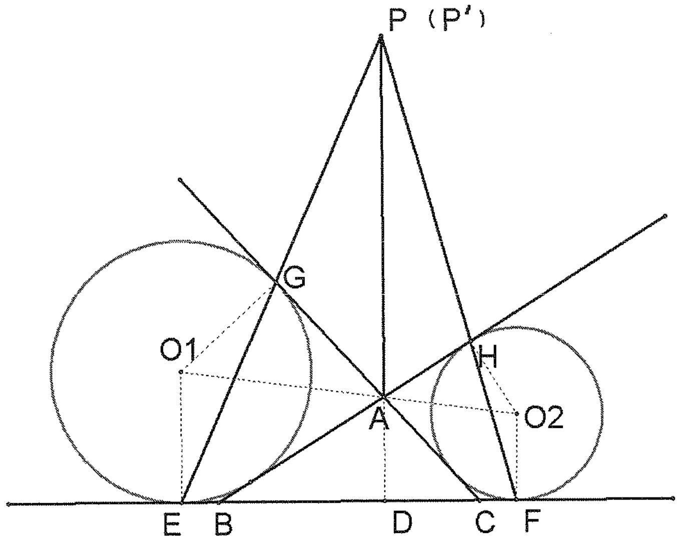
$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n=-\frac{1}{2}a_n(a_n-4)-a_n$$

$$=-\frac{1}{2}a_n^2+a_n=\frac{1}{2}a_n(2-a_n)\ge 0$$

四、如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 和 ΔABC 三邊所在的 3 條直線都相切，E, F, G, H 為切點，直線 EG 與直線 FH 交於點 P。求證: 直線 PA 垂直直線 BC。



【參考解答】



過 A 作 $AD\perp BC$ 於 D, 延長 DA 交直線 HF 於點 P', 並作輔助線如圖:

觀察 ΔABD 及截線 FHP', 應用孟氏定理(Menelaus' theorem)得知

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1 \quad 。$$

因為 $BF=BH$（切線段等長), 所以 $\dfrac{AH}{FD}\cdot\dfrac{DP'}{P'A}=1$ ----------(*)。

因為 CG 和 BH 為外公切線段, 所以 O_1, O_2, A 三點共線。

因為 CG 和 BH 為內公切線, 所以 ΔAGO_1 相似 ΔAHO_2 。

因為 $AD\perp BC$, $O_1E\perp BC$, $O_2F\perp BC$, 所以 O_1E 平行 O_2F 平行 AD。

$$\frac{DE}{DF}=\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AG}{AH}\Rightarrow\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}$$

又 $CE=CG$, 則

$$(*)\Rightarrow 1=\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=\frac{AG}{ED}\cdot\frac{DP'}{P'A}=\frac{AG}{ED}\cdot\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{CE}{CG}=\frac{AG}{CG}\cdot\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{CE}{DE} \quad 。$$

所以, 觀察 ΔADC 應用孟氏定理的逆定理得 G,P',E 三點共線,

即 P' 為直線 EG 與直線 FH 交點, 故 P' 與 P 重合, 所以 $PA\perp BC$ 。