102 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：_____

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題**計算證明題**，滿分爲四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、(12 分) 在一個桌球單打友誼賽中，有若干隊參賽，每隊各含有若干名選手。根據比賽規則，不同隊的任兩位選手都須恰比賽一場，而同隊隊員間則互不比賽。已知總共有11名選手參賽且共舉行了46場比賽，請問共有幾隊？每隊各有多少人？

二、(12 分) 四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，兩對角線 AC 和 BD 交於 E 點。令 P,Q,R,S 分別代表線段 AB,BC,CD,DA 的中點。試證：ΔEPS 與 ΔEQR 的外接圓的半徑相等。

三、(12 分) 已知 a, b, c 為正數且 $a^2+b^2+c^2=4$。試證：$\dfrac{a^{12}}{a^2+bc}+\dfrac{b^{12}}{b^2+ca}+\dfrac{c^{12}}{c^2+ab}\geq 4.$

四、(13 分) 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 為相異整數且滿足 $1\leq a_1, a_2,\cdots, a_{100}\leq 200$。假設對任意 $1\leq i<j\leq 100$，$a_i+a_j\neq 201$ 恆成立，且 $\sum_{i=1}^{100} a_i=10080$。若 $a_1, a_2,\cdots, a_{100}$ 中恰有 k 個是奇數，試證：k 是4的倍數。

102學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

假設共有k隊，而每隊各有$x_1,x_2,\cdots,x_k$人，其中$x_1 \ge x_2 \ge \cdots x_k \ge 1$。由題意知

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=11 \\ \sum\limits_{1\le i<j\le k} x_i x_j = 46 \end{cases} \qquad (A)$$

因$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2-2\sum_{1\le i<j\le k}x_i x_j=121-92=29$, 故待解的方程組$(A)$相當於底下之方程組$(B)$:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_k=11 \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=29 \end{cases} \qquad (B)$$

由(B)的第二個方程知所有的x_i都不大於5，假設x_i中5有a個,4有b個, 3有c個,2有d個,1有e個（故a,b,c,d,e為非負整數）。因此方程組(B)可改寫為:

$$\begin{cases} 5a+4b+3c+2d+e=11 \\ 25a+16b+9c+4d+e=29 \end{cases} \qquad (C)$$

特別地，可得d的上界如下:

$$d \le 5$$

將(C)的第二式減去第一式，則有$20a+12b+6c+2d=18$, 或$10a+6b+3c+d=9$．由此得$a=0$, 故有

$$6b+3c+d=9$$

此方程有六組非負整數解:$(b,c,d)=(1,1,0),(1,0,3),(0,3,0),(0,2,3),(0,1,6)$及$(0,0,9)$。其中最後三組不合，故捨棄。因此本題有三組解:

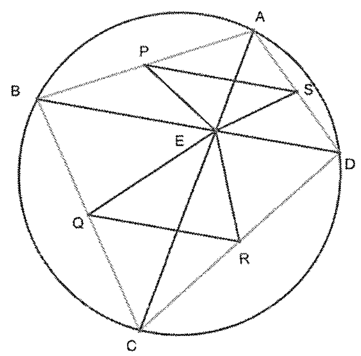
$$(b,c,d)=(1,1,0),(1,0,3),(0,3,0),$$

分別對應到$(a,b,c,d,e)=(0,1,1,0,4),(0,1,0,3,1),(0,0,3,0,2)$,

即$(x_1,x_2,\cdots,x_k)=(4,3,1,1,1,1),(4,2,2,2,1),(3,3,3,1,1)$

結論　共有三種可能情形:6隊參賽，每隊各有4,3,1,1,1,1,人；或共有5隊參賽，每隊各有4,2,2,2,1人或3,3,3,1,1人。

二、【解】



因 $ABCD$ 為圓內接四邊形，$\Delta AED \sim \Delta BEC$，得

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{BC}=\frac{2AS}{2BQ}=\frac{AS}{BQ}$$

由於 $\angle EAS=\angle EBQ$，$\Delta EAS \sim \Delta EBQ$

因此，$\angle AES=\angle BEQ$；同理，$\angle AEP=\angle RED$。

所以，$\angle PES$ 與 $\angle QER$ 互補。

記 $R_{\Delta PES,}R_{\Delta QER}$ 為 ΔEPS 與 ΔEQR 的外接圓的半徑，因 P、Q、R、S 分別為 AB、BC、CD、DA 的中點，$PS=QR=\frac{1}{2}BD$，

故 $2R_{\Delta PES}=\dfrac{PS}{\sin\angle PES}=\dfrac{QR}{\sin\angle QER}=2R_{\Delta PES}$，得證。

三、【解】

利用六項的算術-幾何平均不等式得

$$\frac{a^{12}}{a^2+bc}+\frac{a^2+bc}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 6\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{a^2+bc}\cdot\frac{a^2+bc}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}=6\cdot\frac{a^2}{2}=3a^2$$

故 $$\frac{a^{12}}{a^2+bc}\geq 3a^2-\frac{a^2+bc}{4}-2$$

同理可知 $$\frac{b^{12}}{b^2+ca}\geq 3b^2-\frac{b^2+ca}{4}-2$$

且 $$\frac{c^{12}}{c^2+ab}\geq 3c^2-\frac{c^2+ab}{4}-2$$

從上面三式及已知條件 $a^2+b^2+c^2=4$, 我們可推得

$$\frac{a^{12}}{a^2+bc}+\frac{b^{12}}{b^2+ca}+\frac{c^{12}}{c^2+ab}\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{4}\left(ab+bc+ca\right)-6$$

$$=5-\frac{1}{4}\left(ab+bc+ca\right)\geq 5-\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=4$$

四、【解】

設 $a_1,a_2,\cdots a_{100}$ 中的 k 個奇數為 $a_{i_1},\cdots,a_{i_k}$ ，其餘 $a_{i_{k+1}},\cdots,a_{i_{100}}$ 為偶數。令 b_{i_j} $=201-a_{i_j}, j=1,2,\cdots 100$，則 $b_{i_1},\cdots b_{i_k}$ 皆為偶數，$b_{i_{k+1}},\cdots,b_{i_{100}}$ 為奇數利用 $a_i+a_j\neq 201$，可知 $\left\{a_{i_1},a_{i_2}\cdots a_{i_k},b_{i_{k+1}},\cdots,b_{i_{100}}\right\}=\{1,3,5,\cdots,199\}$,

$\left\{b_{i_1},b_{i_2}\cdots b_{i_k},a_{i_{k+1}},\cdots,a_{i_{100}}\right\}=\{2,4,6,\cdots,200\}$

已知 $10080=\sum_{i=1}^{100}a_i$

$$=\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}+\sum_{j=k+1}^{100}a_{i_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}+\sum_{k+1}^{100}\left(201-b_{i_j}\right)$$

$$=2\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}+\sum_{j=k+1}^{100}201-\left(\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}+\sum_{j=k+1}^{100}b_{i_j}\right)$$

$$=2\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}+201(100-k)-(1+3+\cdots 199)$$

$$\therefore 201k-2\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}=20$$

$\therefore k$ 是偶數

$$\therefore 4\mid 2\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}, 4\mid 20\Rightarrow 4\mid 201k\Rightarrow 4\mid k$$