102學年度北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：________________________(學生自填)

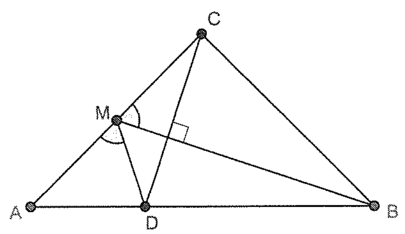
注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設A,B為橢圓$x^2+\frac{y^2}{2}=1$上的兩個動點，滿足直線OA與直線OB的斜率之積為-2，O為原點，試證：$\triangle OAB$的面積為定值。 (16分)

問題二： 設a,b為實數使得$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$至少有一實根。在滿足上述條件的所有可能(a,b)中，求a^2+b^2的最小值。 (16分)

問題三： 等腰直角三角形ABC中，$\angle C$為直角，M為AC中點，過C做BM的垂線交AB於D。證明$\angle AMD=\angle CMB$。



(17分)

102學年度北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 設A,B為橢圓$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$上的兩個動點，滿足直線OA與直線OB的斜率之積為-2，O為原點，試證：$\triangle OAB$的面積為定值。 (16分)

【證】 設直線OA的斜率為m，則直線OB的斜率為$-\dfrac{2}{m}$。不妨設$m>0$，且設A在第一象限。

由$\begin{cases} y=mx \\ x^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 及$\begin{cases} y=-\dfrac{2}{m}x \\ x^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得

$A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+2}},\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2+2}}\right)$, $B\left(\dfrac{m}{\sqrt{m^2+2}},-\dfrac{2}{\sqrt{m^2+2}}\right)$。

因此直線AB的斜率為$\dfrac{\sqrt{2}m+2}{\sqrt{2}-m}$，

直線AB的方程式為$y+\dfrac{2}{\sqrt{m^2+2}}=\dfrac{\sqrt{2}m+2}{\sqrt{2}-m}\left(x-\dfrac{m}{\sqrt{m^2+2}}\right)$，

且與x軸交於$C\left(\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{m^2+2}\right)}{\sqrt{2}m+2},0\right)$。

$$\begin{aligned}\therefore \triangle OAB\text{面積}&=\triangle OAC\text{面積}+\triangle OBC\text{面積}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{m^2+2}\right)}{\sqrt{2}m+2}\left(\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2+2}}+\frac{2}{\sqrt{m^2+2}}\right)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{為定值}\end{aligned}$$

□

問題二： 設a,b為實數使得$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$至少有一實根。在滿足上述條件的所有可能(a,b)中，求a^2+b^2的最小值。 (16分)

【證】 首先觀察到 $x \neq 0$（因為 $0 \neq 1$），因此令 $t = x + \dfrac{1}{x}$，則有 $x^2 - tx + 1 = 0$。因為 x 為實數，得到 $t^2 - 4 \geqslant 0 \iff |t| \geqslant 2$。另外，我們亦知

$$
\begin{aligned}
& x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \\
\iff\ & x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\
\iff\ & \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \\
\iff\ & t^2 + at + (b-2) = 0 \\
\iff\ & t = x + \frac{1}{x} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}
\end{aligned}
$$

綜合上述可知，

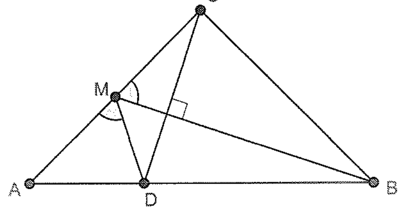
$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}\right| \geqslant 2 \\
\Rightarrow\ & |a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geqslant \left|-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}\right| \geqslant 4 \\
\Rightarrow\ & \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geqslant 4 - |a|
\end{aligned}
$$

將此不等式兩邊平方再化簡以後（若平方後 $\geqslant$ 變成 $\leqslant$，則非最小值）得到

$$
\begin{aligned}
& 8|a| \geqslant 8 + 4b \\
\iff\ & 4a^2 \geqslant b^2 + 4b + 4 \\
\iff\ & 4a^2 + 4b^2 \geqslant 5b^2 + 5b + 4 \\
\iff\ & a^2 + b^2 \geqslant \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

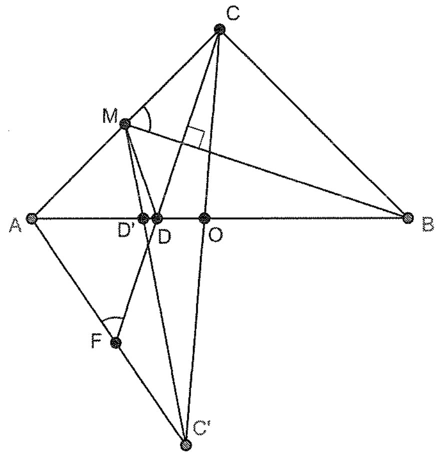
所以，當 $b = -\frac{2}{5}$ 時，$a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{4}{5}$。 □

問題三： 等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，M 為 AC 中點，過 C 做 BM 的垂線交 AB 於 D。證明 $\angle AMD = \angle CMB$。



(17 分)

【證】 參考答案一(逆西瓦定理)：做 C 之於 AB 的對稱點 C'，則 $ACBC'$ 為正方形，如下圖。



因為 $\angle ACF = \angle CBM,\ AC = CB,\ \angle FAC = \angle ACB = 90^\circ,$

所以 $\triangle CAF \cong \triangle BCM$($ASA$全等)，因此線段 $CM = AF = FC'$。因為 $\dfrac{CM}{MA} \cdot \dfrac{AF}{FC'} \cdot \dfrac{C'O}{OC} = 1$，根據逆西瓦定理知：$D'$ 與 D 重疊。所以 $\triangle AMC' \cong \triangle CMB$，所以 $\angle AMD = \angle CMB$。

□

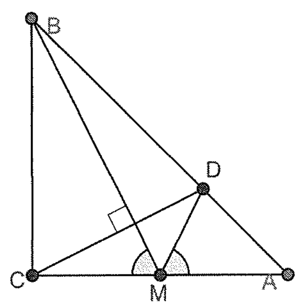
參考答案二(解析)：如下圖，C 置於原點，M 坐標為 $(1,0)$，A 坐標為 $(2,0)$，B 坐標為 $(0,2)$，則 BM 方程式為 $2x + y = 2$，

CD 方程式為 $2y = x$，

AB 方程式為 $x + y = 2$，

而 DM 方程式為上兩式相減，得 $2x - y = 2$

所以直線 DM，與直線 BM 斜率差一個負號，因此 $\angle AMD = \angle CMB$。



□