教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（一）　　編號：________

（時間二小時）

注意事項：

1.本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。

2.請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 $a>0, b>0, c>0$ 且 $a+b+c=1$,

(9分) 證明：$\dfrac{a^3}{1-a}+\dfrac{b^3}{1-b}+\dfrac{c^3}{1-c}\geq\dfrac{1}{6}$。

二、設三角形 ABC 的內心為 I 且外心為 O，已知 $\angle AIO=90°$，$\angle CIO=45°$，

(10分) 求 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$。

三、令 $f(x)=1+(x^2-8x+15)+(x^2-8x+15)^2+\cdots+(x^2-8x+15)^5$,求所有的正整

(10分) 數 m 使得 $f(m)$ 可整除 $f(f(m)+7)$。

四、令 D_n 表 4^n 的十進位展開的所有位數的和，例如：因為 $4^1=4$, $4^2=16$,

(10分) 所以 $D_1=4$, $D_2=1+6=7$. 試決定所有正整數 n 使得 $D_n=D_{n+1}$。

五、設計一個遊戲如右圖所示，由 A 點出發，每

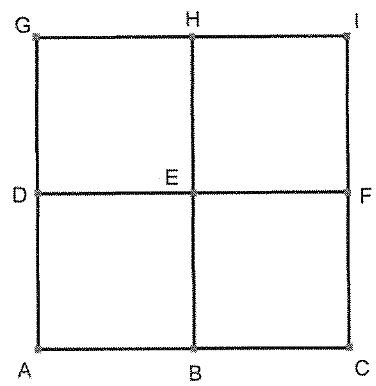
(10分) 一步以相同的機率走向鄰近的點。例如，若

第 n 步位於 B 點，則第 $n+1$ 步位於 A, E 或 C

的機率各是 $\frac{1}{3}$。規定走回 A 點或走到 I 點時，

遊戲停止。問由 A 點出發，最後停在 I 點的

機率為何？



教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

因 $\dfrac{a^3}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1-a^3}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}-(1+a+a^2)$，所以

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{1-a}+\frac{b^3}{1-b}+\frac{c^3}{1-c}&=f(a)+f(b)+f(c)-3-(a+b+c)\\&=f(a)+f(b)+f(c)-4\end{aligned}$$

其中 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-x^2$。 考慮 $0<x,z<1$，欲證

$$f(\theta x+(1-\theta)z)\le\theta f(x)+(1-\theta)f(z)\ \ \forall\ 0\le\theta\le1$$

令 $y=\theta x+(1-\theta)z$，則 $x-y=(1-\theta)(x-z)$ 且 $z-y=\theta(z-x)$

現在

$$\begin{aligned}f(z)-f(y)&=\frac{1}{1-z}-z^2-(\frac{1}{1-y}-y^2)\\&=\frac{z-y}{(1-z)(1-y)}-(z-y)(z+y)\\&=(z-y)\left[\frac{1}{(1-z)(1-y)}-(z+y)\right],\end{aligned}$$

$$f(x)-f(y)=(x-y)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)\right].$$

因此

$$\begin{aligned}&\theta\left[f(x)-f(y)\right]+(1-\theta)(f(z)-f(y))\\&=\theta f(x)+(1-\theta)f(z)-f(y)\\&=\theta(x-y)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)\right]+(1-\theta)(z-y)\left[\frac{1}{(1-z)(1-y)}-(z+y)\right]\\&=\theta(1-\theta)(x-z)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)\right]+(1-\theta)\theta(z-x)\left[\frac{1}{(1-z)(1-y)}-(z+y)\right]\\&=\theta(1-\theta)(x-z)\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)}-(x+y)-\frac{1}{(1-z)(1-y)}+z+y\right]\\&=\theta(1-\theta)(x-z)^2\left[\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}-1\right]\ge0\end{aligned}$$

所以 $\theta f(x)+(1-\theta)f(z)\ge f(\theta x+(1-\theta)z)\ \forall\ 0\le\theta\le1\cdots(*)$

由(＊)知

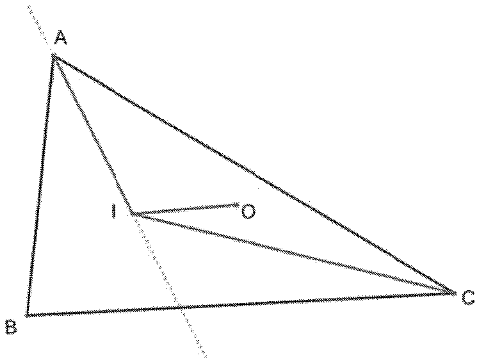
$$f(a)+f(b)\geq 2f(\frac{a+b}{2})$$

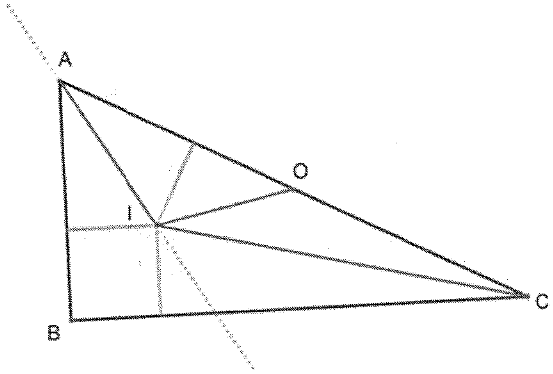
$$\frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{3}f(c)\geq f(\frac{a+b+c}{3})$$

因此 $f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f(\frac{a+b+c}{3})=3f(\frac{1}{3})=\frac{25}{6}$

且 $\frac{a^3}{1-a}+\frac{b^3}{1-b}+\frac{c^3}{1-c}\geq f(a)+f(b)+f(c)-4=\frac{25}{6}-4=\frac{1}{6}$

二、【解】





因 $\angle AIC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle C=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B>90^\circ$， A、C 在 IO 的不同側，又 $\angle CIO=45^\circ$，O、C 在 AI 的同一側(如右上圖)。因此

$$90^\circ+\tfrac{1}{2}\angle B=\angle AIC=90^\circ+45^\circ 。$$

得 $\angle B=90^\circ$，因此 O 在 AC 上。令 R、r 分別為外接圓半徑及內切圓半徑。則 $AO=OC=R$，

$$IA=\frac{r}{\sin\frac{\angle A}{2}}=R\cos\frac{\angle A}{2} 。$$

$r=R\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{1}{2}R\sin A=\frac{1}{4}a$。不失一般性，設 $r=1$。則 $a=4$。以兩種方式算三角形面積得 $rs=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}ac$。因此 $b+4=3c$。由 $16+c^2=a^2+c^2=b^2=(3c-4)^2$，得 $c=3$，$b=5$。故 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=3:4:5$。

三、【解】

$f(m)$ 整除 $f(f(m)+7) \Leftrightarrow f(f(m)+7) \equiv 0(\bmod f(m))$

因 $f(f(m)+7) \equiv f(7)(\bmod f(m))$, 故

$f(m)$ 整除 $f(f(m)+7) \Leftrightarrow f(7) \equiv 0(\bmod f(m))$ 即 $f(m)$ 整除 $f(7)$.

(以上結論用高中數學也可得到)

注意：$f(x)=G(g(x))+g(x)^3 G(g(x))$, 其中 $g(x)=x^2-8x+15$ 及

$G(y)=1+y+y^2$.

$f(7)=G(g(7))+g(7)^3 G(g(7))$.

$G(y)$ 在 $y>-\frac{1}{2}$ 為遞增且 $G(y)>0,\ g(7)=8$

故 $f(m)>f(7)=73\ (m>7)$

因此對 $m \geq 8$, $f(m)$ 不整除 $f(f(m)+7)$,

對於 $m=1,\ 2, \cdots, 7$, 我們有

$$\begin{aligned}
f(1)&=f(7)=73+8^3 \cdot 73=3^3 \cdot 19 \cdot 73\\
f(2)&=f(6)=13+3^3 \cdot 13=2^2 \cdot 7 \cdot 13\\
f(3)&=f(5)=1+0^3 \cdot 1=1\\
f(4)&=1+(-1)^3 \cdot 1=0
\end{aligned}$$

因此，綜合以上討論，得

正整數 m 滿足 $f(m)$ 整除 $f(f(m)+7)$ 若且若唯 $m=1,\ 3,\ 5,\ 7$.

四、【解】

設 $4^n=a_0+10a_1+\cdots+10^r a_r,\ 0 \leq a_i \leq 9$ 則 $D_n=a_0+a_1+\cdots+a_r$.

因 10^i-1 可被 9 整除，$1 \leq i \leq r$,

所以 9 整除 $\sum_{i=0}^{r} a_i(10^i-1)=\sum_{i=1}^{r} a_i 10^i-\sum_{i=1}^{r} a_i=4^n-D_n$.

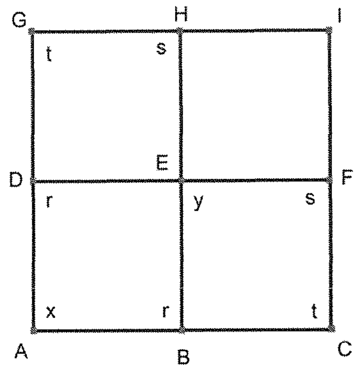
同理，9 可整除 $4^{n+1}-D_{n+1}$.

故 9 可整除 $(4^{n+1}-D_{n+1})-(4^n-D_n)=3 \cdot 4^n-(D_{n+1}-D_n)$

若 $D_{n+1}=D_n$ 則 9 可整除 $3 \cdot 4^n$, 這顯然矛盾。

因此不存在正整數 n 使得 $D_n=D_{n+1}$.

五、【證】



右圖中的小寫數字代表由該點走到I的機率，由於對稱性D與B，H與F，G與C的機率相同，按規則，它們滿足以下方程式：

$$s=\frac{1}{3}(1+y+t)\cdots\cdot(1)$$

$$y=\frac{1}{4}(2s+2r)=\frac{r+s}{2}\cdots\cdot(2)$$

$$r=\frac{1}{3}(y+t)$$

$$t=\frac{r+s}{2}$$

$$x=\frac{r+r}{2}=r$$

$\therefore x=r,\ t=y=\frac{r+s}{2}\ \Rightarrow\ 2y=2t=r+s$

$\therefore r=\frac{1}{3}(y+t)=\frac{2}{3}y=\frac{2}{3}t\ \Rightarrow\ 2t=2y=3r=3x$

代入(2)

$\therefore 3r=r+s\ \Rightarrow\ s=2r=2x$

代入(1), 得 $2x=\frac{1}{3}(1+3x)=\frac{1}{3}+x\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}$

由A出發走至I的機率為$\frac{1}{3}$.