捌、102 學年度各分區複賽試題及參考解答

台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：____________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】12 分

試求方程式 $4\sqrt[3]{4x+3}=x^3-3$ 的所有實數解。

【問題二】12 分

設 N 代表首位數字為 6 的正整數且符合下列條件：

將其首位數字擺在末位數字(個位數)而其它位數保持不變的順序後(如 62⋯5 改排成 2⋯56)，其所得的新正整數變成原來的 $\frac{1}{4}$ 。

試求所有滿足上述條件的正整數 N 。

【問題三】12 分

試找出所有可能的數列 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ，同時滿足以下三個條件：

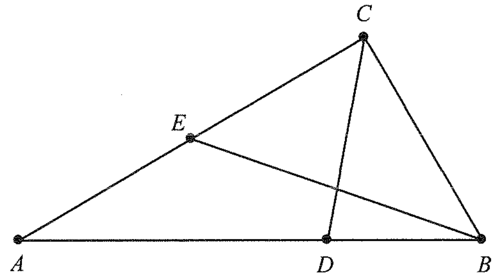
(1)任取兩項並計算它們的和，其總和為 42；

(2)任取三項並計算它們的和，其總和為 126；

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{k}=a_1^2+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{3}+\cdots+\frac{a_n^2}{n}=1$ 。

【問題四】13 分

給定三角形 ABC。設點 D 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AD}=2\overline{BD}$，又點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點。若 $\angle ACD=\angle BEC$，試證：$\triangle ABC$ 是直角三角形。



台北市 102 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)參考答案

【問題一】

求解方程式 $4\sqrt[3]{4x+3}=x^3-3$。

【參考解答】

令 $f(x)=\frac{1}{4}(x^3-3)$，則 $4x+3=(f(x))^3$，可知 $x=\frac{1}{4}((f(x))^3-3)=f(f(x))$。又因 $f(x)=\frac{1}{4}(x^3-3)$ 為嚴格遞增函數，可推得。

(若 $f(x)>x$，則 $x=f(f(x))>f(x)$，矛盾！若 $f(x)<x$，則 $x=f(f(x))<f(x)$，也矛盾！)

因此，$\frac{1}{4}(x^3-3)=x$，亦即 $x^3-4x-3=0$。分解得 $(x+1)(x^2-x-3)=0$，於是可解得 $x=-1,\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$。

【問題二】

設 N 代表首位數字為 6 的正整數且符合下列條件：

將其首位數字擺在末位數字(個位數)而其它位數保持不變的順序後(如 62⋯5 改排成 2⋯56)，其所得的新正整數變成原來的 $\frac{1}{4}$。

試求所有滿足上述條件的正整數 N。

【參考解答】

由 $6a_1a_2...a_n=4(a_1a_2...a_n6)$

知 $6\times10^n+a_1\times10^{n-1}+...+a_{n-1}\times10+a_n=4(a_1\times10^n+...+a_{n-1}\times100+a_n\times10+6)$

$\therefore 6\times10^n-24=a_1\times10^{n-1}(40-1)+...+a_{n-1}\times10(40-1)+a_n\times(40-1)$

$=39\times[a_1\times10^{n-1}+...+a_{n-1}\times10+a_n]$

$\Rightarrow 39|59...976$ 中間 9 之個數為 6k+3 個時可成立

(最少為 3 個 9 的情況：$39|599976$ 而 $599976=39\times15384$)

故答案為 615384、615384615384、615384615384615384…等等。

【問題三】

試找出所有可能的數列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，同時滿足以下三個條件：

(1)任取兩項並計算它們的和，其總和為 42；

(2)任取三項並計算它們的和，其總和為 126；

(3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k} = a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \cdots + \frac{a_n^2}{n} = 1$。

【參考解答】

設 $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$，則因 $\sum_{i<j}(a_i + a_j)$ 的求和中每一項 a_i 都恰好出現 C_1^{n-1} 次，故

$42 = C_1^{n-1} \cdot A$；同理，在 $\sum_{i<j<k}(a_i + a_j + a_k)$ 的求和中每一項 a_i 都恰好出現 C_2^{n-1} 次，故

$126 = C_2^{n-1} \cdot A$。兩式相除可得：

$$\frac{42}{126} = \frac{(n-1)A}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}A} = \frac{2}{n-2}$$

由此解得 $n = 8$，進一步可推得 $A = 6$。因此，利用柯西不等式，可得

$$(a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \ldots + \frac{a_n^2}{n})(1+2+3+\ldots+n) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 = A^2$$

即 $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k} = a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \ldots + \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{A^2}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{36}{36} = 1$

等號成立時，這 $n = 8$ 項數列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 必須滿足：

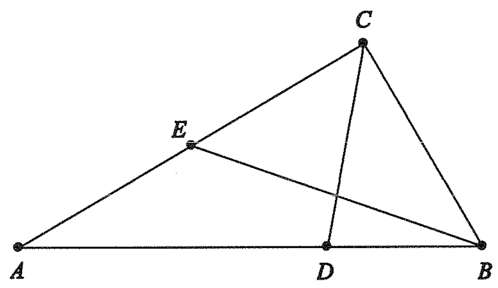
$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{3} = \ldots = \frac{a_8}{8} \text{ 且 } a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = 6 \text{。}$$

由此可解得 $a_1 = \frac{1}{6}$，$a_2 = \frac{2}{6}$，$a_3 = \frac{3}{6}$，…，$a_8 = \frac{8}{6}$。

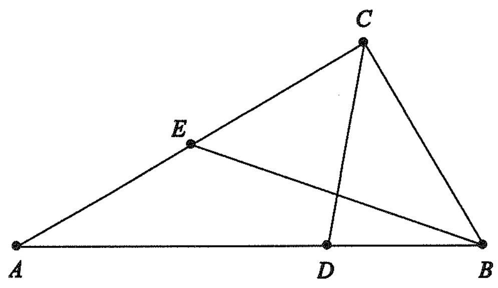
(這數列是滿足題設三個條件的唯一數列)

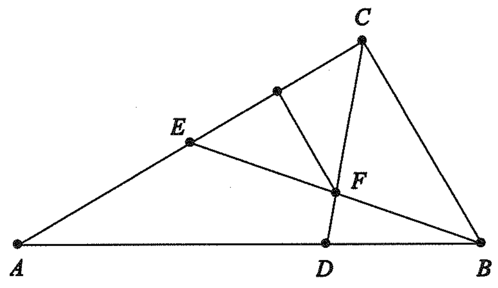
【問題四】

給定三角形 ABC。設點 D 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AD}=2\overline{BD}$，又點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點。若 $\angle ACD=\angle BEC$，試證：$\triangle ABC$ 是直角三角形。



【參考解答】





證 1：設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 的交點為 F。因為 $\angle ACD=\angle BEC$，所以，$\triangle FCE$ 是等腰三角形。

在 $\triangle ABE$ 中，因為點 F、C、D 分別是直線 BE、EA、AB 上的 menelaus 點，而且點 F、C、D 共線，所以，依 Menelaus 定理，可得

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}\times\left(-\frac{\overline{EC}}{\overline{CA}}\right)\times\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=-1\text{ 。}$$

因為點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點且 $\overline{AD}/\overline{DB}=2$，所以，$\overline{BF}=\overline{FE}$，點 F 是 $\overline{BE}$ 的中點。因為 $\overline{FE}=\overline{FC}$，所以，$\overline{FB}=\overline{FE}=\overline{FC}$。於是，點 F 是 $\triangle BCE$ 之外接圓的圓心，$\angle ACB$ 是直角。