高雄市 105 學年度國民中學數學競賽
個人賽試題

________國民中學____年級　編號：________　姓名：_________

作答時間: 二 小 時　　　　　　　　　　　　　　　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 一群學生前往科教館校外教學，人數在 60~99 人之間，科教館的售票對團體的優惠方式是 50 人以上(含 50 人)，票價打八折；100 人以上(含 100 人)，票價打七折。領隊前往買票時，買了 100 張入場，並宣稱這樣比較便宜。請問這群學生的人數最少有幾人?

答: 88 人

2. 已知 $a^2+b^2+c^2=4$，$a+2b+3c=9$，求 $a^3+b^3+c^3$ 之值為___ 。

答: 無解

3. 已知 α 為方程式 $x^2+3x-2=0$ 的正根，β 為方程式 $x+\sqrt{x+1}=3$ 的根，試求 $\alpha+\beta$ 之值為 ___。

答: 2

4. 設 m、n 為正整數，若 $m:n=5:7$，且 m 和 n 的最大公因數與最小公倍數的和是 1620，試求 $m+n$ 之值為___。

答: 540

5. 一天 24 小時當中，時鐘面上所有時針與分針重合的時刻之和共為幾時幾分?

答: 144 時

6. 平面上有相異的 20 條線直線，其中有 8 條彼此之間相互平行，則此 20 條直線最多可將平面分成___部分。

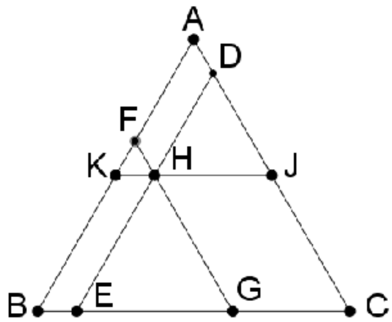
答: 183

7. 如圖所示，請在每個空格中填入一個整數，使得每行、每列及每條對角線上的三個整數的和皆相等。求 $e+f$ = __。　　答:10

5	a	8
b	2	c
d	e	f

8. 如圖，△ABC 中，$\overline{DE}//\overline{AB}$，$\overline{FG}//\overline{AC}$，$\overline{KJ}//\overline{BC}$，且△$FKH$ 面積=$\frac{7}{16}$，△DHJ 面積=$3\frac{15}{16}$，△HEG = 7，求△ABC 面積為___。

答:28



9. 已知直角三角形的邊長均為正整數且周長和為 30 公分，則內切圓的面積為_____平方公分。

答: 4π 平方公分

10. 設 a, b, c 為非負的實數，求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{a+b+c}$ 的最小值為__。

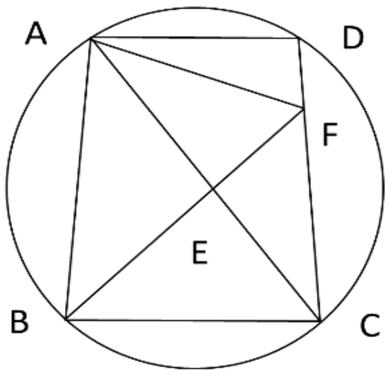
答: 1

11. 假設小明的生日是A月B日，九天過後是C月D日(例如，如果小明是 3 月 18 日出生，則A = 3，B = 18，C = 3，D = 27)。若$A + B = 2(C + D)$，則 $3A + 4B$ = ___。

答: 149

12. 如下圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，$AB = CD$，$\angle BEC$=70°，$\angle ABF$=30°，$\angle ACD$=20°，求$\angle AFD$ 為多少度?

答:50 度



第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 將平面上正 17 邊形的每一個頂點塗成紅色或藍色，而每個頂點只能塗一顏色，試證一定可以找到一個頂點同色的等腰三角形。

【參考解答】將頂點依順時鐘方向編號為 $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$

若這 17 點均為同色，則為所求

若不為同色，因 17 為奇數，故存在相鄰的兩頂點為同色，不失其一般性，令這兩點為 a_1, a_2，今考慮 $a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{17}$ 這五點。

(i) 若 a_{10} 與 a_1, a_2 同色，則此為同色等腰三角形

(ii) 若 a_{10} 與 a_1, a_2 不同色，

(ii-1) a_3, a_{17} 與 a_{10} 均同色，則此為同色等腰三角形

(ii-2) a_3, a_{17} 至少有一點與 a_{10} 不同色，則此點與 a_1, a_2 為同色等腰三角形

2. 在ΔABC中，□$ACB = 90^0$，$AB = 2$公分，$BC = 1$公分，D為BC邊上一點。已知 $\frac{AC}{CD}$ 是方程式 $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$ 的一個較大的根，求CD的長為多少公分？

【參考解答】

將原方程式變形整理得 $3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$。

令 $x+\frac{1}{x}=y$，

解得 $y_1=\frac{8}{3}$ 、 $y_2=-1$。

當 $y=\frac{8}{3}$ 時，解得 $x_1=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 、$x_2=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ ；

當 $y=-1$ 時，得判別式 $\Delta<0$，

故此方程式 $x+\frac{1}{x}=-1$ 無解。

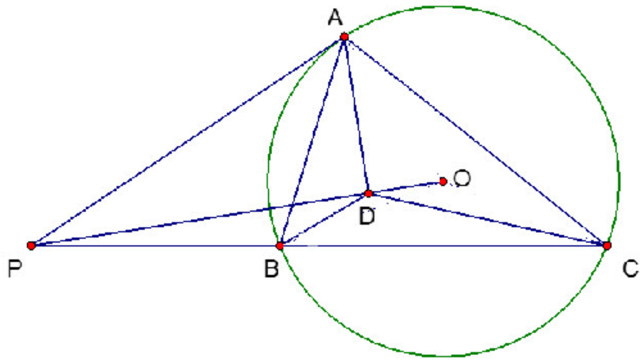
□ $\frac{AC}{CD}$ 是方程式 $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$ 的一個較大的根，

即 $\frac{AC}{CD}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$。

在直角ΔABC 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$

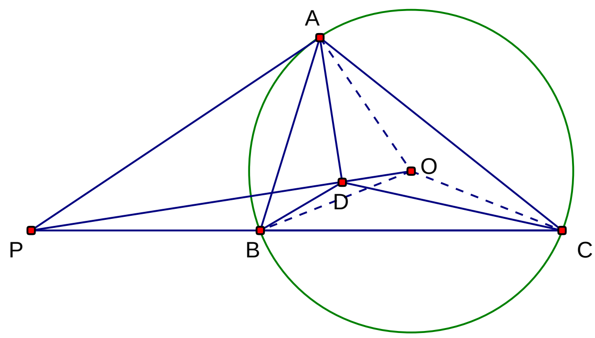
□ 在直角ΔADC 中，$\frac{\sqrt{3}}{CD}=\frac{AC}{CD}=\frac{4+\sqrt{7}}{3} \Longrightarrow CD=\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$。

3. 如下圖，自圓 O 外一點 P 做切線交圓 O 於 A 點，$\overline{PC}$為圓 O 的割線分別交圓 O 於 B 點和 C 點，且 D 是$\overline{OP}$上之點使得$\overline{AD}\perp\overline{OP}$。若圓半徑長為 5 且 $\overline{PO}=13$，試求$\overline{BD}\times\overline{CD}$之值。



【參考證明】：

連接$\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}$



$\because \overline{OA}\perp\overline{AP}$ 且 $\overline{OA}=5$ 與 $\overline{PO}=13$

$\therefore \overline{AP}=12$ 　　故 $\overline{AD}=\dfrac{\overline{AP}\times\overline{OA}}{\overline{PO}}=\dfrac{60}{13}$

$\because \overline{AD}\perp\overline{OP}$，$\overline{OA}\perp\overline{AP}$

$\therefore \quad \overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PO}$ 與 $\overline{AD}^2=\overline{PD}\times\overline{OD}$ 　$\cdots\cdots\cdots(1)$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$ 　　$\therefore \overline{PB}\times\overline{PC}=\overline{PD}\times\overline{PO}$

故知 D、B、C、O 四點共圓

$\therefore \angle PDB=\angle PCO=\angle OBC=\angle ODC$ 和 $\angle PBD=\angle COD$

故得 $\triangle PBD \sim \triangle COD$ (AA 相似)

$\therefore \dfrac{\overline{PD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OD}}$ 　$\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)可得 $\overline{BD}\times\overline{CD}=\overline{AD}^2=\dfrac{3600}{169}$