

臺北市立木柵高級工業職業學校 106 學年度第二次教師甄選

數學科試題

請用藍黑色原子筆，答案須化簡至最簡，採分段計分無過程不計分。考試結束請一併交回答案卷與試題。

1. 已知有理數 $k = \frac{11 \times 26 + 12 \times 27 + 13 \times 28 + 14 \times 29 + 15 \times 30}{11 \times 25 + 12 \times 26 + 13 \times 27 + 14 \times 28 + 15 \times 29}$ ，求 $100k$ 的整數部分。 8%

2. 已知 a, b, c 為正實數，且 $\begin{cases} a^2 + b^2 + ab = 9 \\ b^2 + c^2 + bc = 16 \\ c^2 + a^2 + ca = 25 \end{cases}$ ，求 $a + b + c$ 8%

3. 求多項式 $f(x) = x^{2006} - x^{2004} - x^{2002} - \dots - x^2 - 2$ 的所有實根的平方和。 8%

4. 求所有的整數 k ，使得 $6k^2 - 7k - 5$ 為某個質數的平方。 8%

5. 計算 $\int_0^1 \int_x^1 x^2 \sqrt{1+y^4} dy dx$ 8%

6. 已知函數 f 滿足 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 。某學生作法如下： 10%

$\because \frac{f(0)}{0}$ 為 $\frac{0}{0}$ 不定型，故依羅必達法可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = f'(0) = 1$$

請問這樣的作法是否正確？若正確是否能有其他解法？若錯誤請舉一反例說明錯誤之處。

7. 平面上有一個面積為 1 的凸四邊形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ，且對角線 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 交於 O 點，求 $\triangle AOD$ 面積的最大值。 8%

8. $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$ ， $a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $|f(x)| \leq |\sin x|, \forall x \in \mathbb{R}$
證明： $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$ 10%

9. 某圍棋賽由實力相當的甲、乙、丙三棋手參加，規則如下：甲、乙先開始，然後敗者退出由丙遞補重新再下第二盤；接著敗者再退出，再由另一人遞補重新再賽。依此規則最後連勝 2 局者獲勝。試問最後甲獲勝的機率 8%

10. 一長方體內部對角線到三條與他不相交的稜之間的最短距離分別 $2\sqrt{5}, \frac{30}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{10}}$ ，試求此長方體的體積。 8%

11. 試求所有實數 x ，使得 $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ 8%

12. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 5, \overline{CA} = 7$ ， P 為任意一點，試求 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 的最小值。 8%