

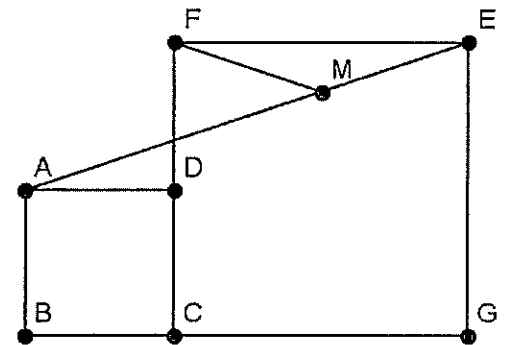
【數學實作評量】試題

※ 請將計算過程、答案、或證明過程，依題號寫入答案卷的指定欄位，否則不予計分。

一、第 1 題 ~ 第 8 題為計算題：(每題 8 分。要寫出過程，否則不予計分)

1. 如圖,正方形 ABCD 和正方形 CGEF 的邊長分別是 3 和 6 且點 B,C,G 在同一直線上,M 在 \overline{AE} 上,且

$\overline{ME} = \frac{1}{3}\overline{AE}$, 試求 \overline{FM} 的長度。



2. 已知 $\triangle ABC$ 之三邊長為 $\sqrt{29}$ 、 $\sqrt{37}$ 、 $\sqrt{52}$ ，求 $\triangle ABC$ 之面積。

3. 試求聯立方程組 $\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$ 的實數解 (x, y) 。

4. 試求出所有邊長為自然數，且面積等於周長的直角三角形。

5. x 為實數， $f(x) = (x^2 - x + 2)(x^2 - x + 4) - 7$

(1) 設 $t = x^2 - x$ ，求 t 的最小值。

(2) 求 $f(x)$ 的最小值。

6. n 為正整數，設 $f(x)$ 表示 \sqrt{x} 的整數部份。例如： $f(3) = 1$ ， $f(7) = 2$ ， $f(16) = 4$ ，若 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = 167$ ，試求 n 的值。

7. 四邊形 $ABCD$ 的四個頂點分別為 $A(0,0)$ ， $B(3,0)$ ， $C(5,5)$ ， $D(0,3)$ ， P 為平面上任一點。

(1) 當 P 點坐標為 (a,b) 時， $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 有最小值，求 $a+b$ 之值。

(2) 當 P 點坐標為 (c,d) 時， $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 有最小值，求 $c+d$ 之值。

8. 有一個正整數恰好為它的各位數的數字和的 13 倍，試求出所有滿足條件的正整數。

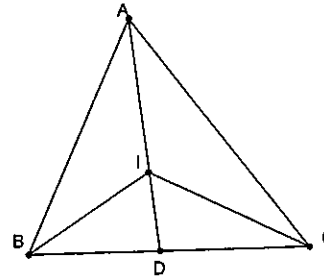
二、第 9 題 ~ 第 12 題為證明題：(第 9 ~ 11：每題 8 分；第 12 題 12 分。要寫出過程，否則不予計分)

9. 請敘述並證明畢氏定理。

10. 如右圖：直線 AD 是 $\angle BAC$ 的平分線，I 在直線 AD 上，

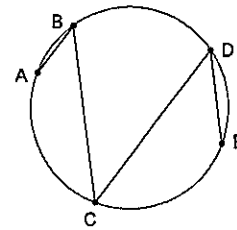
$$\text{且 } \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC。$$

試證：I 是 $\triangle ABC$ 的內心。



11. 如圖 A, B, C, D, E 皆在圓上， $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45^\circ$ 。

$$\text{試證： } \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DE}^2$$



12. 八位羽球選手舉行循環賽，已知每位選手都必須與另七位選手各進行一場比賽(比賽沒有和局)，若

第一位選手勝 x_1 場，負 y_1 場；第二位選手勝 x_2 場，負 y_2 場；...；第八位選手勝 x_8 場，負 y_8 場。試證：

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_8^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2$$