

國立彰化女子高級中學 106 年第一次教師甄選 數學科 筆試試題(P1)

測驗時間：120 分鐘

一、填充題 A 部分(每題 4 分，共 28 分：不用詳述計算過程，簡答即可，全對才給分)

1. 設 $x, y, z \in R$ ，已知 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=-9 \end{cases}$ ，求 x 的最大值與最小值。

2. 從 5,6,7,8 這四種數字中選出四個寫成四位數(數字可重複使用)；若 5 的右邊不能緊接著 6，且 5 的右邊不能緊接著 7；則這樣的四位數共有幾個？

3. 某人擲兩顆骰子，若擲出之點數和為 9 時，可得 200 元，並可繼續投擲，若第二回又擲出點數和為 9，則又再得 200 元，並可繼續投擲。重複此法直到點數和非 9 時，求此人所得的期望值。

4. 設直線 L 與函數 $f(x) = -x^3 + 2x - 5$ 的圖形交於相異三點 A 、 B 、 C 。若 A 、 B 、 C 三點的 x 坐標成等差數列，且 $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$ ，則直線 L 的方程式為_____。

5. 已知空間中兩點 $A(7,6,3)$ 、 $B(5,-1,2)$ 與直線 $L: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-3}{-2}$ ，若 P 為直線 L 上的動點，求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值時的 P 點座標。

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)(1^5 + 2^5 + \dots + n^5)}{(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)(1^4 + 2^4 + \dots + n^4)} = ?$

7. $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 135^\circ$ ， $\overline{BC} = 4$ ，點 D 為 \overline{BC} 中點，則 $\tan \angle BAD$ 的最大值為_____。

二、填充題 B 部分(每題 5 分，共 40 分：不用詳述計算過程，簡答即可，全對才給分)

1. 求 $(2016^{2019} + 2018^{2019})$ 除以 2017^2 的餘數。

2. 若方程式 $x^4 + 8x^3 - 2x^2 + kx - 5 = 0$ 的四個實根分別為 a 、 b 、 c 、 d ，而方程式 $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} = 0$ 的實根為 -6 、 -1 、 1 ，則 $k =$ _____。

3. 當 $f(t) = |t^2 - (-1)| + \sqrt{t^4 - 20t^2 - 4t + 145}$ 有最小值時，此時 t 值為何？

國立彰化女子高級中學 106 年第一次教師甄選 數學科 筆試試題(P2)

4. 設 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，若 $\tan x = m$ 時，函數 $f(x) = \frac{16}{\sin^6 x} + \frac{81}{\cos^6 x}$ 有最小值為 n ，求數對 (m, n) 之值。

5. 袋中有 2 顆紅球、2 顆黃球與 1 顆綠球。袋中每球被取出的機率相同。從袋中每次取出一球，取後不放回。若取出的球未滿三色則繼續取球；若取出的球累積到三色都至少有一顆即停止取球。則取球次數的期望值為何？

6. 若 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數，且滿足
$$\begin{cases} 1 \leq f(2013) \leq 5 \\ 3 \leq f(2014) \leq 13 \\ 2 \leq f(2015) \leq 8 \end{cases}$$
，則 $f(2017)$ 的最大值為何？

7. 將多項式 $(a+b+c)^{2017} + (a-b-c)^{2017}$ 展開並合併同類項，試問化簡後共有幾項？

8. 將 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ 重新排列成 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ ，若重排呈現 $a_1 + a_2 + a_3 \geq a_5 + a_6 + a_7$ ，則稱此重排是「前重」的，例如 $(3, 4, 5, 6, 7, 1, 2)$ 、 $(7, 3, 1, 6, 5, 4, 2)$ 均為「前重」的重排。依此定義能排出「前重」的重排的機率為_____

三、計算題 (共 32 分)

1. 請以各種不同的解題方法求點到直線距離。

題目：求點 $P(8, 7)$ 到直線 $L: 4x - 3y + 19 = 0$ 的距離。

說明 1：請於每種方法概述該法的主要解題結構，再列出解題過程。

說明 2：每種方法得 3 分，本題上限 12 分。(12 分)

2. 數列 $\{a_n\}$ 滿足
$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = 2a_{n-1} - 4n + 13, n \geq 2 \end{cases}$$
，則 a_{50} 是幾位數？(已知 $\log 2 \gg 0.3010$ ， $\log 3 \gg 0.4771$ ，

$\log 7 \gg 0.8451$)(6 分)

3. 空間座標中，聯立不等式
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$
 的所有點所形成的體積為何？(7 分)

4. 證明： $\frac{1}{15} < \frac{C_{50}^{100}}{2^{100}} < \frac{1}{10}$ (7 分)

國立彰化女子高級中學 106 年第一次教師甄選 數學科 筆試答案

一、填充題 A 部分(每題 4 分，共 28 分：不用詳述計算過程，簡答即可，全對才給分)

| | | | |
|---|----------------------|---------------------|------------------------|
| 1. 5,-3 | 2. 164 | 3. 25 元 | 4. $2x + y + 5 = 0$ |
| 5. $P(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ | 6. $\frac{10}{9}$ | 7. $\frac{1}{7}$ | / |

二、填充題 B 部分(每題 6 分，共 48 分：不用詳述計算過程，簡答即可，全對才給分)

| | | | |
|----------------------|------------|---------------------|-----------------------------------|
| 1. 8068 | 2. - 24 | 3. $\frac{1}{2}$ | 4. $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 625)$ |
| 5. $\frac{19}{5}$ | 6. 39 | 7. 1018081 | 8. $\frac{73}{140}$ |

三、計算題 (共 24 分)

1. 略

2. 答：16 位數

3. 答： $\frac{16}{3}$

4. **Proof** : 令 $p = \frac{C_{50}^{100}}{2^{100}} = \frac{99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 1}{100 \times 98 \times 96 \times \dots \times 2}$, $q = \frac{100 \times 98 \times 96 \times 94 \times \dots \times 2}{101 \times 99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 3}$, $r = \frac{98 \times 96 \times 94 \times \dots \times 2}{99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 3}$

則 $pq = \frac{1}{101}$, $pr = \frac{1}{100}$

$\therefore p = \frac{99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 1}{100 \times 98 \times 96 \times \dots \times 2} < \frac{100 \times 98 \times 96 \times 94 \times \dots \times 2}{101 \times 99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 3} = q$, $\therefore p^2 < pq = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$, $p < \frac{1}{10}$

又 $p = \frac{1}{2} \times \frac{99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 3}{100 \times 98 \times 96 \times \dots \times 4} > \frac{1}{2} \times \frac{98 \times 96 \times 94 \times \dots \times 2}{99 \times 97 \times 95 \times \dots \times 3} = \frac{1}{2}r$, $\therefore p^2 > \frac{1}{2}pr = \frac{1}{200} > \frac{1}{225}$, $p > \frac{1}{15}$