

臺中市立臺中第一高級中等學校 106 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

說明：答案請寫在答案卷上，計算證明題請詳列過程。

壹、填充題 A 部分(第 1 題至第 6 題，每題 5 分，共 30 分)

1、設 $a_n = \frac{2}{n} \left\{ (2^2 + 1) + \left[\left(2 + \frac{2}{n} \right)^2 + 1 \right] + \left[\left(2 + \frac{4}{n} \right)^2 + 1 \right] + \dots + \left[\left(2 + \frac{2n-2}{n} \right)^2 + 1 \right] \right\}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

2、設 $f(x) = ax + b$ ，其中 a, b 為實數， $f_1(x) = f(x)$ ， $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ， $\forall n \in N$ 。若 $f_7(x) = 128x + 381$ ，則 $a + b =$ _____。

3、若 $f(x) = x^3 - x$ ，自點 $P(2, a)$ 可對 $y = f(x)$ 作三條相異切線，則實數 a 的範圍為_____。

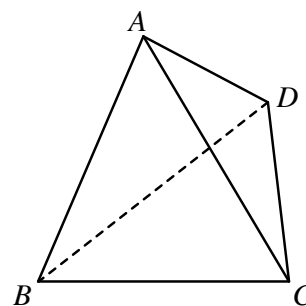
4、設 \overline{AB} 為拋物線 $y^2 = 4x$ 的一弦， O 為原點，且 $\overline{AO} \perp \overline{BO}$ ，求 $\triangle OAB$ 面積的最小值為_____。

5、設 z 為複數，且滿足 $\text{Arg}(z + 3i) = 40^\circ$ ， $\text{Arg}(z - 3i) = 310^\circ$ ，求 $|z| =$ _____。

6、如右圖，在四面體 $A-BCD$ 中，若 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{CD} = \sqrt{3}$ ， \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{CD} 的距離為 2，

且 \overrightarrow{BA} 與 \overrightarrow{CD} 之夾角為 $\frac{\pi}{3}$ ，

則四面體 $A-BCD$ 的體積為_____。

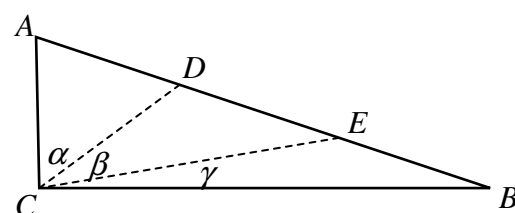


填充題 B 部分(第 7 題至第 11 題，每題 8 分，共 40 分)

7、若 $f(x) = x^{17} + 4x^3 - 3x + 1$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x^4 - x^3 + x - 1)$ 的餘式為_____。

8、如右圖，直角 $\triangle ABC$ 的斜邊為 \overline{AB} ，若 $\overline{AC} = 1$ ， $\overline{BC} = 3$ ， \overline{AB} 的三等分點為 D, E ，且 $\angle ACD = \alpha$ ， $\angle DCE = \beta$ ， $\angle ECB = \gamma$ 。

則 $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} =$ _____。



9、若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展開式為 $\sum_{k=0}^{2000} a_k x^k$ ，則 $\sum_{k=0}^{666} a_{3k}$ 之值為_____位數。($\log 3 \approx 0.4771$)

10、已知 $n \in N$ ，當 $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ 時，函數 $f(x) = a_n x^n$ 且 $a_1 = 1$ 。若 $f(x)$ 在區間 $(0,1]$ 上為連續函數，則 $a_n =$ _____。(以 n 表示)

11、如果自然數 a 的各位數字之和等於 7，那麼稱 a 為“吉祥數”。將所有“吉祥數”從小到大排成一列如 a_1, a_2, a_3, \dots ，若 $a_n = 2005$ ，則 $a_{5n} =$ _____。

貳、計算證明題(共 3 題，每題 10 分，共 30 分。須詳列過程)

一、有一種過關遊戲規定：在第 n 關要拋擲一顆公正骰子 n 次，如果這 n 次拋擲所出現的點數總和大於 2^n ，就算過關。則：

(1) 某人在這項遊戲中最多能過幾關？(4 分)

(2) 他連過前三關的機率是多少？(6 分)

二、設 $\{a_n\}$ 為等差數列， $\{b_n\}$ 為等比數列，且 $b_1 = a_1^2$ ， $b_2 = a_2^2$ ， $b_3 = a_3^2$ ， $a_1 < a_2$ ，又 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sqrt{2} + 1$ 。

試求數列 $\{a_n\}$ 的(1)首項 a_1 (5 分)

(2)公差 (5 分)

三、已知 $0 \leq x \leq 1$ ， $n \in N$ 。試證明： $0 \leq x^n - x^{n+1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ 。(10 分)

臺中市立臺中第一高級中等學校 106 學年度第 1 次
教師甄選
數學科 答案卷

初閱	複閱

請由此開始書寫

壹、填充題 A 部分(第 1 題至第 6 題，每題 5 分，共 30 分)

1	2	3
$\frac{62}{3}$	5	$-2 < a < 6$
4	5	6
16	3	$\frac{1}{2}$

填充題 B 部分(第 7 題至第 11 題，每題 8 分，共 40 分)

7	8	
$5x^3 - x^2 - 3x + 2$	3	
9	10	11
477	$n!$	52000