

台北市立北一女中九十一學年度數學科競試考題

高二、高三組試卷

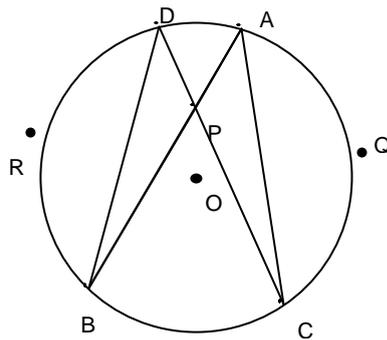
試卷 (一)

本試卷共 5 題計算證明，每題 20 分

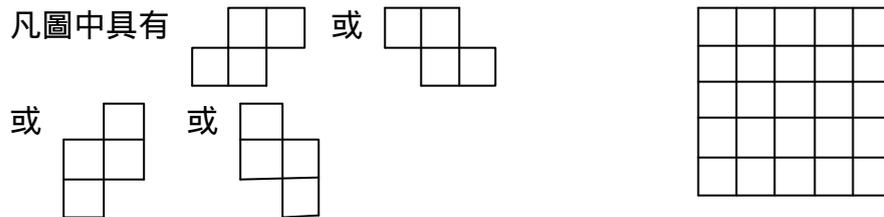
1. 設以 O 為圓心的圓上兩弦 \overline{AB} \overline{CD} 交於 P ，而 Q 、 R 分別為 $\triangle APC$ 與 $\triangle BPD$ 的外心，試證：

(1) 直線 \overline{PR} 垂直 \overline{AC}

(2) 線段 \overline{OP} 與 \overline{QR} 互相平分



2. 能否將 1,2,3,..,25 等 25 個自然數，填入 5×5 方格內(如右圖)，每一格一個數，使它滿足：凡圖中具有



的四個小格內，所填的 4 個數之和都是 9 的倍數？

3. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $[f(x)]^3 - 1$ 為 $(x+1)(x^3 - 1)$ 所整除，試求 $f(x)$ 。

4. 設 a_1, a_2, \dots, a_n 為大於 1 且相異的自然數

試證： $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \dots (1 + \frac{1}{a_n}) < 2$

5. 設 $\triangle ABC$ 為正三角形， $A(0,0)$, B, C 均在第一象限內， \overline{BC} 交 X 軸於 D ，交 Y 軸於 E ，而 $\triangle ABD$ 的面積為 $\triangle ACE$ 的兩倍，求 $\triangle ACE$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比

試 卷 (二)

本試卷共 5 題填充題，每題 10 分

1. n 為自然數， $25n^2 + 24n + 34$ 等於相鄰兩自然數之積，求 $n =$ _____
2. x, y 為實數，且 $3x^2 - 7xy + 3y^2 = 7$ ，設 $S = x^2 + y^2$ ，求 S 的最小值_____
3. 平面上四邊形 $ABCD$ 的邊長， $\overline{AB} = 2, \overline{DA} = 1$ ，內角 $\angle BAD = 120^\circ, \angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$
設兩對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交角為 θ ，則 $\sin \theta =$ _____
4. 設 z 是一複數，且 $\frac{z}{z-1}$ 是純虛數(即虛部不為 0 而實部為 0)，試求 $|z-i|$ 的最大值_____
5. 一個稜長(邊長)為 1 的正四面體內，放入 20 個全等的球，試求球的最大半徑_____