

1. (此題可能記錯或者題目有誤)

設 $t > 0$, 且函數 $f(t)$ 滿足

$$f\left(1 - \frac{1}{t+1}\right) + f\left(\frac{t+1}{t}\right) \log(t+1) = f\left(\frac{t+1}{t}\right) \log(t) + 2016$$

試求 $f(100)$

2. (此題可能記錯或者題目有誤)

設箱中有 3 球, 編號為 1, 2, 3. 每次取球皆取一球, 取後放回, 並記錄其編號。

設 P_n 表示取 n 次後, 將這 n 次的編號加總後是”偶數”的機率。

若存在正實數 α, β 使得對於所有自然數 n , 皆滿足 $P_{n+1} = \alpha + \beta P_n$

(α, β 有沒有大於零這個條件我忘記了)

試求在第五次取球後總和為偶數的情形下, 第三次取球後總和為偶數的機率

3.

設 Z_1, Z_2, Z_3 為複數平面上三個點, 且 $|Z_1| = 2, |Z_2| = \sqrt{5}, |Z_3| = 3$.

若 Z_1, Z_2, Z_3 在複數平面上形成一個重心在 0 的三角形, 試求

$\overline{Z_1}Z_2 + \overline{Z_2}Z_3 + \overline{Z_3}Z_1$ 的實數部分。

4. (數值忘記了)

只記得是兩個四次式開根號相加求最大值, 其中一個是 $\sqrt{x^4 - x^2 + 1}$?

5.

設矩陣 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

求最小的自然數 n 使得 A^n 裡面的任一個非零元素之絕對值均大於 2^{100}

題號不確定 A (數值忘記了)

旋轉體積?

題號不確定 B

設 \overline{AB} 為 $y = x^2$ 的動弦 (A, B) 在 $y = x^2$ 上，且 $\overline{AB} > 1$ (還是 ≥ 1 ?)
若 M 為 AB 的中點，求 M 離 x 軸的最短距離，以及此時的 M 。

題號不確定 C

已知三圓兩兩相交，試證其公弦所在直線三線交於一點或兩兩平行。

題號不確定 D (數值忘記了)

$f(x)$ 為二次多項式，已知 $f(1), f(2), f(4)$ 的範圍
求 $f(7)$ 的範圍

題號不確定 E

設 $A(-2, -2), B(4, 4)$ ，今某人要從 A 點走到 B 點，且每次行走只有三種向量可選
 $\vec{\alpha} = (2, 2), \vec{\beta} = (0, 1), \vec{\gamma} = (1, 0)$
試求有幾種走法?

題號不確定 F

設箱中有綠球 2 顆黃球 3 顆紅球 4 顆白球 5 顆，每次取一球，取後不放回 (每顆球取出的機會都是公正的)，
直到所有的球被取完為止。
試求紅球最先被取完的機率是多少?

題號不確定 G

$3^{50} - 10 \cdot 2^{75} = k \cdot 10^n$ ，其中 n 是整數， $1 \leq k < 10$ 。
試求 n 及 k 的整數部分

題號不確定 H

設 a_k 表示為最接近 $\sqrt{k}2$ 的整數, ex: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$.

試求 $\sum_{k=1}^{2016} \frac{1}{a_k}$

14.

三角形 ABC · 已知 $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ · $\tan B = \frac{1}{3}$ · 已知最長邊長為 20 · 試求最短邊長。

15.

設正三角形 ABC 的內接圓半徑為 3, 且內接圓圓心為 O.

D 為三角形 ABC 中一點, 且 $\overline{OD} = 2$

試求 $\frac{\triangle ABD \text{的面積}}{\triangle ACD \text{的面積}}$ 的最大值

16.

學生發現 · 圓上若有 2, 3, 4 個點, 將這些點全部連連起來變成弦 · 則這些弦最多可以將圓分割成 2, 4, 8 塊.

所以學生推測 · 若圓上有 n 個點 · 則將這些點連起來, 最多可以將圓分割成 2^{n-1} 塊.

試問: 學生的想法是否正確? 若正確, 請證明之。

若錯誤, 請指出錯誤的地方, 並給予正確的解答。