2011 年 亞太數學奧林匹亞競賽之初選考試 試題

2011 年 2 月 12 日

說明: ①② . . . 爲標示列號, 每個標示列號代表數字 $0, 1, \ldots, 9$ 其中之一, 每題 (大題或小題) 完整的答案包含一組標示列號。請以 2B 鉛筆將答案依照標示列號塗寫在答案卡之「解答欄」中。答錯不倒扣, 未完全答對一組標示列號, 則不給分。

一、「古怪路」上住了 53 戶, 由近而遠分別編爲 $1, 2, 3, \cdots, 53$ 號, 而且相鄰的兩戶的間隔都是十公尺。偶數編號的住戶都沒有小孩, 奇數編號 $2k+1$ 的住戶正好有 $(2k+1)^2$ 個小孩。試問:

(1) (3分)「古怪路」上一共有 ①②③④⑤ 個小孩。Ans. 26235

(2) (4分) 現在要選擇一個住家讓所有「古怪路」的小朋友前來舉辦派對。若想要讓小朋友走到舉辦地點的距離之總和達到最小, 應該選擇編號 ⑥⑦ 的住家來舉辦派對。Ans. 43

二、(7分) 將10個箱子編號爲 $1, 2, 3, \cdots, 10$, 另將10個球編號爲 $1, 2, 3, \cdots, 10$。今規定編號 i 的球只能放入編號 $1, 2, 3, \cdots, i$ 的箱子, $i = 1, 2, 3 \cdots, 10$。求恰有一個空箱子的放球方法數? 答:⑧⑨⑩⑪ 種。Ans. 1013

三、在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$, $AC = 4$, $BC = 3$, 其中圓 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 爲 $n(n \geq 2)$ 個相等的圓, 令其半徑爲 r。圓 O_1 與圓 O_2 相外切, 圓 O_2 與圓 O_3 相外切, $\cdots$, 圓 O_{n-1} 與圓 O_n 相外切, 圓 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 都與 $\overline{AB}$ 相切, 且圓 O_1 與 $\overline{AC}$ 相切, 圓 O_n 與 $\overline{BC}$ 相切。試問:

(1) (2分) 當 $n = 2$ 時, $r =$ ⑫/⑬ (化成最簡分數)。Ans. 5/7

(2) (7分) 當 $n = 2011$ 時, $r =$ ⑭/⑮⑯⑰ (化成最簡分數)。Ans. 1/805

四、(7分) 平面上有12個點, 且任意三點不共線, 以其中任意一點爲始點, 另一點爲終點作向量, 且作出所有的向量。其中3邊向量的和爲零向量的三角形稱爲 “零三角形”。求以這些點爲頂點的 “零三角形” 個數的最大值? 答: ⑱⑲。Ans. 70

五、質數 p 滿足兩個關係式: (i) $p = m^2 + n^2$; (ii) p 可整除 $m^3 + n^3 - 4$, 其中 m 與 n 是某兩個整數 (可以相同)。試問:

(1) (3分) 由以上條件可以推導出: 如果 $p \neq 2$ 則 p 可整除 $(m+n)^{⑳} +$ ㉑。
(註: 第 ⑳ 格表示次方數) Ans. 3, 8

(2) (7分) 已知滿足以上條件的質數是有限多個, 試求: 這些質數的總和? 答: ㉒㉓。
Ans. 20