

# 105 中山女中代理教師甄選 數學科

1. 用兩種不同的方法證明  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是無理數。
2. 從  $1, 2, 3, \dots, 15, 16$  等 16 個數中任挑五個，其中兩數連續，其餘皆不連續的方法有幾種？
3. 令  $A, B, C$  為單位圓上的三個點，點  $O$  為圓心，且  $\overline{OA}, \overline{OB}$  的夾角為  $120^\circ$ 。若  $\overline{OC} = \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB}$ ，用兩種不同的方法求  $\alpha + \beta$  的最大值。
4. 以高二學生能理解的程度，用幾何圖形說明：
  - (a) 當  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  時， $\sin \theta < 2 \sin \frac{\theta}{2}$ ， $\tan \theta > 2 \tan \frac{\theta}{2}$ 。
  - (b) 當  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  時， $a \cos \theta + b \sin \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ 。
5. 國王想處死某異教徒，但基於開國紀念日，給予異教徒一個特赦的機會，於是安排了一場遊戲。在此遊戲中有四道門，其中一道是安全的門，另外三道後是兇猛的獅子，如果異教徒選到安全的門，國王便放他一條生路。異教徒首先選了一號門，而此時公主覺得異教徒可憐，便暗示他四號門後面有獅子，異教徒心懷感激，便選擇了另一扇門開啟。請問此異教徒獲得特赦的機會為何？寫下您的答案並說明如何引導學生思考，方法越多越好。
6. 同時擲  $n$  顆相同的骰子，出現偶數顆點數 1 的機率為  $\frac{1}{2}(a + b^n)$ ，求  $a, b$ 。
7. 請用高一學生可以理解的方法，說明如何解下面的問題：  
方程式  $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0$  有相異的一正根兩負根，試求  $k$  的範圍。
8. 設  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  是一組二維數據，將它們標準化後變成  $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_n, y'_n)$ ，證明  $Y'$  對  $X'$  的迴歸直線為  $Y' = rX'$ ，其中  $r$  為此二維數據的相關係數。
9. 滿足方程式  $(\log_9 y)^2 + (2^{x+1} + 2^{-x+1})(\log_9 y) + (2^{2x+1} + 2^{-2x+1}) = 0$  的  $y$  為何？
10. 若曲線  $\Gamma_1: y = a^x$  和  $\Gamma_2: y = \log_a x$  相切於一點  $A$ ，試求底數  $a$  和切點  $A$ 。